

N° d'ordre 25661

Série A n° 1700

THÈSES

PRÉSENTÉES

A la Faculté des Sciences de l'Université de Paris

POUR OBTENIR

le grade de Docteur ès Sciences Physiques

PAR

F. London

PREMIÈRE THÈSE

*Première thèse : Une conception nouvelle
de la supraconductibilité*

Deuxième thèse : Les propriétés de l'hélium au zéro absolu

Soutenues le **13 MAR 1937** devant la Commission d'examen

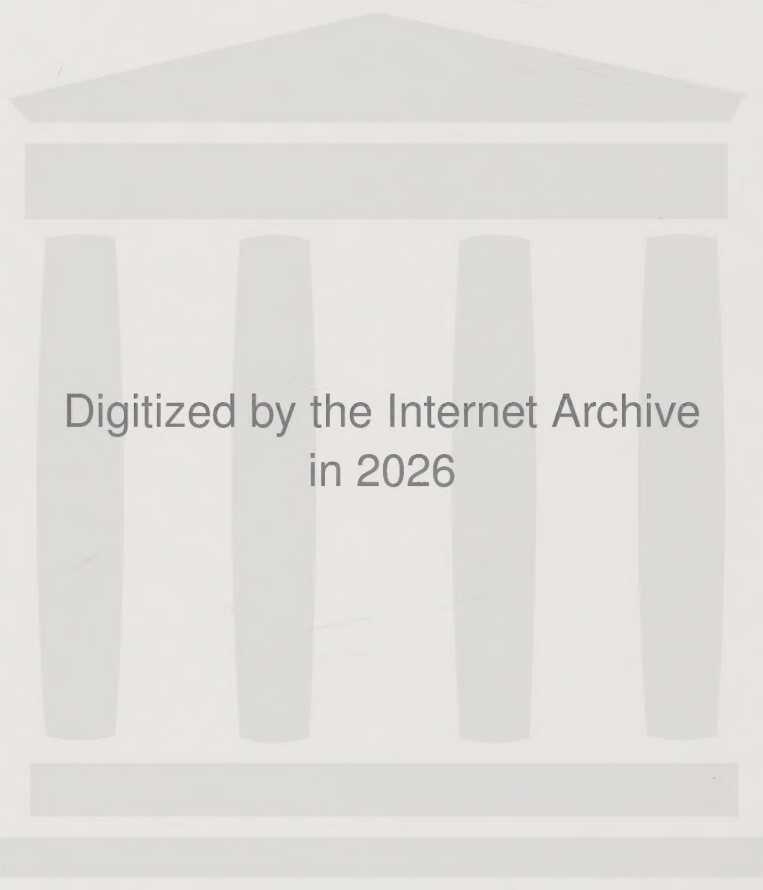
MM. E. BLOCH, *Président.*
L. de BROGLIE } *Examineurs.*
F. PERRIN }

PARIS

HERMANN & C^{ie}, EDITEUR

6, rue de la Sorbonne

—
1937



Digitized by the Internet Archive
in 2026

THÈSES

présentées à la Faculté des Sciences de l'Université de Paris

pour obtenir

le grade de Docteur ès Sciences Physiques



N° d'ordre 25661

Série A n° 1700

THÈSES

PRÉSENTÉES

A la Faculté des Sciences de l'Université de Paris

POUR OBTENIR

le grade de Docteur ès Sciences Physiques

PAR

F. London

PREMIÈRE THÈSE

*Première thèse : Une conception nouvelle
de la supraconductibilité*

Deuxième thèse : Les propriétés de l'hélium au zéro absolu

Soutenues le 13 MAR 1937 devant la Commission d'examen

MM. E. BLOCH, *Président.*

L. de BROGLIE }
F. PERRIN } *Examineurs.*

PARIS

HERMANN & C^{ie}, EDITEUR

6, rue de la Sorbonne

—
1937

Faculté des Sciences de l'Université de Paris

MM.

Doyen honoraire M. MOLLIARD.
Doyen G. MAURAIN, Professeur, Physique du globe.

Professeurs honoraires . . .	{	H. LEBESGUE.	GUILLET.	JANET.
		A. FERNBACH.	PÉCHARD.	LESPIEAU.
		A. LEDUC.	FREUNDLER.	MARCHIS.
		Emile PICARD.	AUGER.	VESSIOT.
		Rémy PERRIER.	BLAISE.	PORTIER.
		Léon BRILLOUIN	DANGEARD.	

PROFESSEURS

G. BERTRAND T	Chimie biologique.	ROBERT-LÉVY T	Physiologie comparée.
M. CAULLERY T	Zoologie (Evolution des êtres organisés).	F. PICARD	Zoologie (Evolution des êtres organisés).
G. URBAIN T	Chimie générale.	Henri VILLAT T	Mécanique des fluides et applications.
Emile BOREL T	Calcul des probabilités et Physique mathématique.	Ch. JACOB T	Géologie.
Jean PERRIN T	Chimie physique.	P. PASCAL T	Chimie minérale.
H. ABRAHAM T	Physique.	M. FRÉCHET T	Calcul différentiel et calcul intégral.
E. CARTAN T	Géométrie supérieure.	E. ESCLANGON T	Astronomie.
M. MOLLIARD T	Physiologie végétale.	Mme RAMART-LUCAS T	Chimie organique.
L. LAPICQUE T	Physiologie générale.	H. BÉGHIN T	Mécanique physique et expérimentale.
A. COTTON T	Recherches physiques.	FOCH	Mécanique expérimentale des fluides.
J. DRACH T	Analyse supérieure et algèbre supérieure.	PAUTHENIER	Physique (P. C. B.).
Charles FABRY T	Enseignement de physique.	DE BROGLIE T	Théories physiques.
Charles PÉREZ T	Zoologie.	CHRÉTIEN	Optique appliquée.
Léon BERTRAND T	Géologie structurale et géologie appliquée.	P. JOB	Chimie générale.
E. RABAUD T	Biologie expérimentale.	LABROUSTE	Physique du Globe.
M. GUICHARD	Chimie minérale.	PRENANT	Zoologie.
Paul MONTEL T	Théorie des fonctions et théorie des transformations.	VILLEY	Mécanique physique et expérimentale.
P. WINTREBERT T	Anatomie et histologie comparées.	BOHN	Zoologie (P. C. B.).
L. BLARINGHEM T	Botanique.	COMBES	Botanique (P. C. B.).
O. DUBOSCQ T	Biologie maritime.	GARNIER T	Mathématiques générales.
G. JULIA T	Mécanique analytique et mécanique céleste.	PÈRES	Mécanique théorique des fluides.
C. MAUGUIN T	Minéralogie.	HACKSPILL	Chimie (P. C. B.).
A. MICHEL-LÉVY	Pétrographie.	LAUGIER	Physiologie générale.
H. BÉNARD T	Mécanique expérimentale des fluides.	TOUSSAINT	Technique Aéronautique.
A. DENJOY T	Application de l'analyse à la géométrie.	M. CURIE	Physique (P. C. B.).
L. LUTAUD T	Géographie physique et géologie dynamique.	G. RIBAUD T	Hautes températures.
Eugène BLOCH T	Physique théorique et physique céleste.	CHAZY T	Mécanique rationnelle.
G. BRUHAT	Physique.	GAULT	Chimie (P. C. B.).
E. DARMOIS	Enseignement de physique.	CROZE	Recherches physiques.
A. DEBIERNE T	Physique générale et radio-activité.	DUPONT T	Théories chimiques.
A. DUFOUR T	Physique (P. C. B.).	LANQUINE	Géologie.
L. DUNOYER	Optique appliquée.	VALIRON	Mathématiques générales.
A. GUILLIERMOND T	Botanique.	BARRABÉ	Géologie structurale et géologie appliquée.
M. JAVILLIER	Chimie biologique	MILLOT	Zoologie (P. C. B.).
L. JOLEAUD	Paléontologie.	F. PERRIN	Théories physiques.
		VAVON	Chimie organique.
		G. DARMOIS	Calcul des probabilités et physique mathématique.

Secrétaire A. PACAUD.
Secrétaire honoraire D. TOMBECK.



Introduction

Dans cette étude, nous allons exposer une théorie macroscopique de la supra-conductibilité. Il nous semble que l'obstacle qui nous empêche de comprendre ce phénomène fameux doit être cherché avant tout dans l'interprétation macroscopique habituelle, qui considère la supra-conductibilité comme un cas limite de la conductibilité ordinaire. A l'heure actuelle, la situation est telle qu'on peut démontrer à peu près rigoureusement qu'il est impossible de fonder une théorie de la supra-conductibilité sur les bases admises de la théorie électronique tant que l'on interprète le phénomène à la manière habituelle.

Bloch et Landau ⁽¹⁾ ont formulé le programme dont la réalisation était considérée en général jusqu'à présent comme la tâche d'une future théorie de la supra-conductibilité. Il semblait nécessaire d'imaginer par quel mécanisme un métal peut, *en l'absence de tout champ extérieur*, être, dans son *état le plus stable*, le siège d'un *courant*. La stabilité thermo-dynamique de l'état supra-conducteur et en particulier la stabilité des courants permanents eux-mêmes semblent conduire nécessairement à cette conception, et à ce propos on a souvent rappelé l'exemple des métaux ferromagnétiques dont les *états les plus stables* comportent une *aimantation permanente sans l'intervention d'un champ extérieur*. Cependant contre cette analogie, Bloch lui-même et Brillouin ⁽²⁾ ont apporté un argument très important d'après lequel, pour des raisons très générales, l'état le plus stable d'un mécanisme quelconque constitué par des électrons possède très probablement toujours, en l'absence d'un champ extérieur, un *courant nul*.

Nous allons montrer que le problème que l'on a attaqué de

façon si malencontreuse n'est pas posé par la nature des faits, que l'interprétation des expériences a dépassé les faits observés ; et c'est pour cette raison qu'on a posé à la théorie électronique un problème certainement insoluble.

L'interprétation que nous donnons aux faits s'écarte essentiellement du programme mentionné plus haut, en tant qu'elle exprime ce que nous a appris récemment l'expérience, la *signification fondamentale du champ magnétique* pour l'apparition d'un supra-courant. Le champ magnétique n'est pas simplement un attribut du supra-courant comme du courant ordinaire. Il joue un autre rôle encore, un rôle « actif » pour ainsi dire. Nous le considérerons comme la *cause* du courant dans le supra-conducteur comme le champ électrique est la cause du courant dans les conducteurs ordinaires. Il ne s'agira donc nullement d'expliquer l'existence d'un courant sans champ extérieur et nous retirons ainsi tout fondement à l'argumentation de Bloch, sans porter la moindre atteinte à la stabilité thermodynamique de l'état supra-conducteur.

Cette conception conduit à une théorie macroscopique de la supra-conductibilité qui va nous permettre d'avoir déjà une vue sur le mécanisme de ce phénomène, et de le décrire, d'une façon remarquablement simple, dans le langage de la cinématique quantique. Une théorie électronique de la supra-conductibilité reste encore, il est vrai, du domaine de l'avenir ; mais il est clair qu'on n'arrivera pas à expliquer les phénomènes par une théorie moléculaire tant qu'on n'aura pas exposé les faits macroscopiques sous une forme satisfaisante.

§ 1. Quelques faits fondamentaux et leurs corrélations thermodynamiques

Jusqu'à ces derniers temps, on croyait généralement qu'il existe une différence fondamentale entre les deux cas suivants :

1. Un supra-conducteur est d'abord refroidi jusqu'au-dessous de son point de transition et porté ensuite dans un champ magnétique.

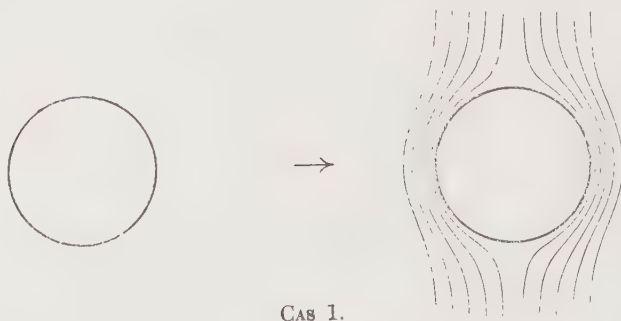
2. Le champ magnétique est tout d'abord appliqué dans l'état normal, et le refroidissement au-dessous du point de transition n'a lieu qu'ensuite.

Dans un conducteur de conductibilité infinie [c'est ainsi que l'on se croyait obligé de caractériser un supra-conducteur], il n'est possible d'effectuer aucun changement du flux magnétique (*); on croyait pouvoir en déduire que le champ magnétique qui règne dans le supra-conducteur au moment du passage au point de transition, se « congèle », pour ainsi dire (*).

Des expériences importantes, particulièrement la fameuse expérience de Kamerlingh-Onnes et Tuyn (4) sur la persistance des supra-courants dans une sphère, semblaient jusqu'à présent confirmer cette conception, suivant laquelle l'état d'un supra-conducteur n'est pas uniquement défini par les variables habituelles [comme la température, la valeur du champ magnétique, etc.], mais caractérisé en outre par une sorte de souvenir de l'état au cours duquel la supra-conductibilité s'est établie la fois précédente. Selon cette conception, l'état actuel du supra-con-

(*) Dans le cas limite $\sigma \rightarrow \infty$, l'équation de Maxwell $\text{c. rot } \mathbf{E} = - \dot{\mathbf{B}}$ et la loi d'Ohm $\mathbf{E} = \frac{1}{\sigma} \mathbf{J}$ entraînent $\dot{\mathbf{B}} = 0$.

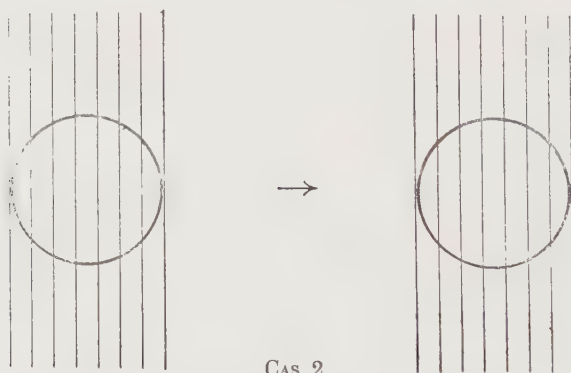
ducteur dépendrait du chemin qu'il a suivi pendant son histoire antérieure.



CAS 1.

Une sphère supra-conductrice est d'abord refroidie jusqu'au dessous du point de transition

et portée ensuite dans un champ magnétique.



CAS 2.

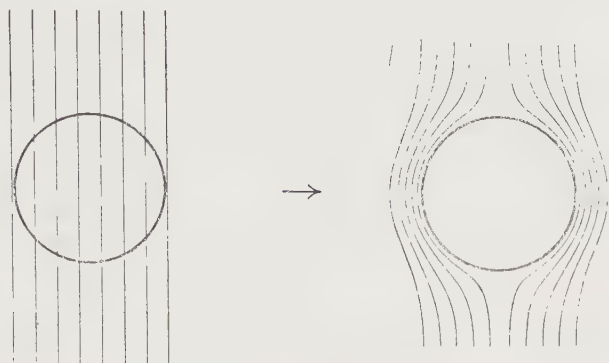
Le champ magnétique est d'abord appliqué dans l'état normal

et le refroidissement au-dessous du point de transition n'a lieu qu'ensuite.

FIG. 1. — Le conducteur de conductibilité infinie.

Récemment, nos idées ont subi une profonde révolution due à une expérience qui fut d'abord réalisée par Meissner et Ochsenfeld (1933) et répétée ensuite par plusieurs chercheurs ⁽⁵⁾. Réalisée dans des conditions idéales ⁽⁶⁾, cette expérience paraît démontrer ce qui suit : *Un supra-conducteur refroidi dans un champ magnétique au-dessous de son point de transition, refoule le champ magnétique en dehors de la région supra-conductrice.* Ce que nous entendons par conditions idéales n'est pas très facile à préciser. Le fait que, dans des conditions « non idéales », on a

trouvé dans des supra-conducteurs des champs magnétiques congelés, semble être lié à la présence d'inclusions non supra-conductrices. Ce fait peut être expliqué soit par la nature non homogène de la substance, soit en supposant que les lignes de force magnétiques se sont condensées dans certaines régions du supra-conducteur, de telle sorte que le champ magnétique critique



Le champ magnétique appliqué dans l'état normal

est refoulé par le supra-conducteur lorsqu'il est refroidi au dessous de son point de transition

FIG. 2. — L'effet Meissner, réalisé dans des conditions « idéales ».

y soit dépassé, ce qui entraîne la destruction de la supra-conductibilité dans ces régions. La présence des champs congelés serait alors uniquement liée à la présence d'*anneaux supra-conducteurs* embrassant des flux magnétiques dans des inclusions non supra-conductrices (v. § 9).

Par conséquent, il faudrait regarder la persistance des flux magnétiques initiaux comme un phénomène non pas élémentaire, mais très complexe, liée à la présence de plusieurs constituants ou de plusieurs phases superposées en une connexion topologique multiple. En revanche, le phénomène élémentaire de la phase supra-conductrice *pure* serait une chose de beaucoup plus simple. D'après la découverte de Meissner, il semble que la transition de l'état normal à l'état supra-conducteur soit *réversible*, en ce sens que le flux magnétique est *toujours égal à zéro* en tout point du supra-conducteur, *indépendamment du chemin* parcouru, que le champ magnétique soit appliqué avant ou après la traversée de la courbe de discontinuité.

Il apparaît donc que l'état supra-conducteur doit être caractérisé non seulement par la disparition du champ électrique E :

$$E = 0$$

mais en plus par celle du flux magnétique B :

$$B = 0.$$

Cette conception est confirmée par les relations thermodynamiques que l'on peut démontrer, une fois la réversibilité admise, entre la courbe des champs magnétiques critiques, la chaleur spécifique et la chaleur de transformation (⁷). Ces relations fournissent réciproquement une vérification expérimentale de l'hypothèse de la réversibilité.

Pour établir ces relations, on considère un cycle thermodynamique dans le plan des variables H (champ magnétique extérieur) et T (température). Il est commode d'utiliser un supra-conducteur en forme de cylindre indéfini de génératrices parallèles au champ, de manière à avoir un champ uniforme dans

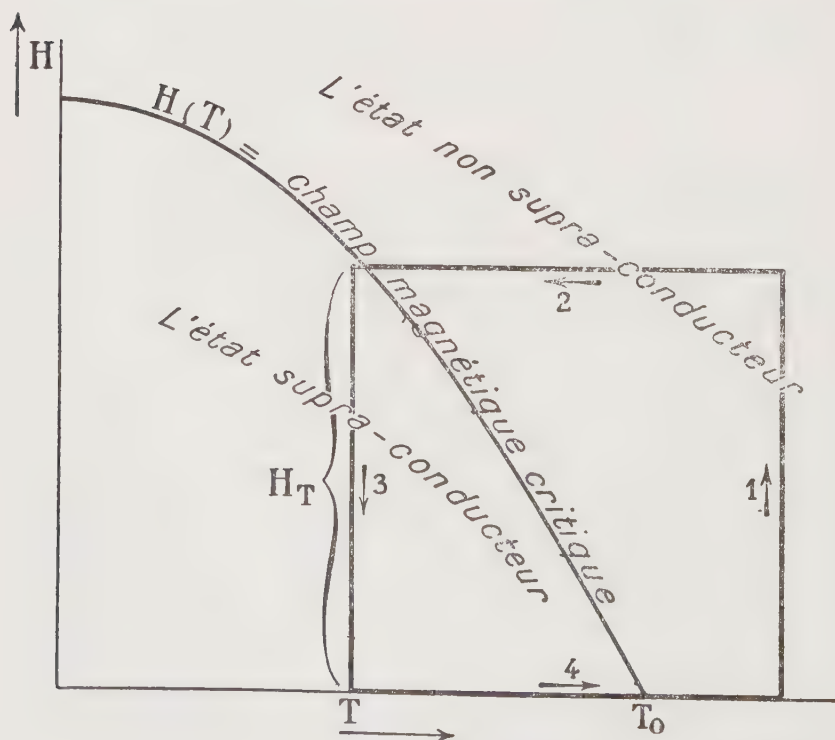


FIG. 3. — Cycle thermodynamique

tout l'espace extérieur, et que le champ critique soit atteint au même instant en tous les points de la surface. Soit $H(T)$ (ou H_r) la fonction définissant le champ critique, c'est-à-dire le champ H qui, à la température T , détruit la supra-conductibilité. T_0 sera le point de transition pour $H = 0$.

Dans le cycle représenté sur la figure 3, le champ magnétique ne cédera de travail au système que dans les étapes 1 et 2. On calcule ce travail A le plus simplement en intégrant le vecteur de Poynting à travers une portion de la surface extérieure du cylindre prise sur une hauteur de 1 cm et en intégrant ensuite par rapport au temps.

Pendant le trajet 1 l'induction B est égale à H et croît avec H de 0 à H_r [nous admettons ici que la perméabilité dans l'état non supra-conducteur est égale à 1]. On obtient :

$$A_1 = -c \int \left\{ \oint [\mathbf{E}\mathbf{H}] ds \right\} dt = -c \int H \left\{ \oint \mathbf{E}_s ds \right\} dt = \\ \int H \left\{ \iint \dot{B}_n d\sigma \right\} dt = V \int_0^{H_r} H dB = \frac{1}{2} H_r^2 \cdot V$$

[V est le volume d'une tranche du cylindre de hauteur 1 cm.]

Pendant le trajet 2, le champ magnétique à la surface est constant $= H_r$. On peut donc le faire sortir de l'intégrale. Par contre, à la traversée de la courbe des valeurs critiques, la valeur de l'induction B tombe de H_r à zéro, plus ou moins brusquement :

$$A_2 = H_r \int \left\{ \iint \dot{B}_n d\sigma \right\} dt = H_r V \int_{H_r}^0 dB = H_r V (0 - H_r) = -H_r^2 V$$

Le travail A_3 est nul, car le flux magnétique dans le supra-conducteur est, pendant cette étape, constamment nul. De même $A_4 = 0$.

Le travail total A , cédé (par unité de volume) au système pendant le cycle, s'écrit :

$$A = \frac{1}{V} (A_1 + A_2 + A_3 + A_4) = -\frac{1}{2} H_r^2 \quad (1)$$

Comme ce travail a été cédé au cours d'une transformation

réversible, il donne immédiatement la différence $f_s - f_n$ des énergies libres des deux phases, par unité de volume :

$$f_s - f_n = -\frac{1}{2} H_r^2 \quad (1')$$

Désignons par c_s la chaleur spécifique de la phase supra-conductrice, par c_n celle de la phase normale, par Q_r la chaleur de transformation à la température T , en particulier Q_o la chaleur de transformation à la température T_o . [Toutes les énergies seront considérées comme positives lorsque dans le cycle elles seront cédées par le milieu extérieur au supra-conducteur.]

Le premier principe de la thermodynamique appliqué au volume moléculaire V_m nous donne alors pour le cycle total :

$$\oint (dQ + dA) = Q_o + Q_r + \int_{T_o}^T (c_n - c_s) dT - \frac{1}{2} H_r^2 V_m = 0 \quad (2)$$

et le deuxième, avec l'hypothèse de la réversibilité :

$$\oint \frac{dQ}{T} = \frac{Q_o}{T_o} + \frac{Q_r}{T} + \int_{T_o}^T \frac{c_n - c_s}{T} dT = 0 \quad (3)$$

Multiplions (3) par T et soustrayons de (2) :

$$Q_o \left(1 - \frac{T}{T_o}\right) - T \int_{T_o}^T \frac{c_n - c_s}{T} dT + \int_{T_o}^T (c_n - c_s) dT - \frac{1}{2} H_r^2 V_m = 0$$

Dérivons par rapport à T :

$$\frac{Q_o}{T_o} = - \int_{T_o}^T \frac{c_n - c_s}{T} dT - \frac{d}{dT} \left(\frac{1}{2} H_r^2 \right) V_m \quad (4)$$

c'est-à-dire pour $T = T_o$:

$$Q_o = - T_o \frac{d}{dT} \left(\frac{1}{2} H_r^2 \right)_{T=T_o} V_m$$

Dans les courbes expérimentales, H_r s'annule pour $T = T_o$ avec une tangente d'inclinaison finie et bien déterminée. Il en résulte que la dérivée de son carré s'y annule aussi en ce point et par conséquent :

$$Q_o = 0 \quad (5)$$

Au point de discontinuité, il n'y a pas de chaleur de transformation. En fait, on n'en a jamais observé.

Dérivons (4) par rapport à T , nous obtenons (l'équation de Helmholtz-Gibbs) :

$$c_s - c_n = T \frac{d^2}{dT^2} \left(\frac{1}{2} H_r^2 \right) V_m \quad (6)$$

La différence des chaleurs spécifiques peut donc se calculer, lorsque la courbe des champs critiques est connue. En particulier, on obtient au point $T = T_0$ une discontinuité Δc de la chaleur spécifique [formule de Rutgers (*)] :

$$\Delta c = (c_s - c_n)_{T=T_0} = T_0 \frac{d^2}{dT^2} \left(\frac{1}{2} H_r^2 \right)_{T=T_0} V_m = T_0 \left(\frac{dH_r}{dT} \right)_{T=T_0}^2 V_m \quad (7)$$

La discontinuité de la chaleur spécifique est donc définie par la tangente à la courbe des champs critiques au point de transition.

Enfin (3), (5) et (6) nous donnent la chaleur de transition Q_T

$$Q_T = T \int_{T_0}^T \frac{c_s - c_n}{T} dT = T \frac{d}{dT} \left(\frac{1}{2} H_r^2 \right) V_m \quad (8)$$

Jusqu'à présent, ces formules n'ont pas encore été discutées à fond. Les mesures les plus importantes sont celles de la discontinuité des chaleurs spécifiques Δc pour Sn et Tl. On a trouvé :

	Δc exp.	Δc théor.
Tl	0,00148 $\frac{\text{cal}}{^\circ\text{K}}$	0,00144 $\frac{\text{cal}}{^\circ\text{K}}$
Sn	0,0024	0,00229

L'effet magnétocalorique (8) a été trouvé par Mendelssohn et Moore (*) et par Keesom et Kok (10). Ces derniers ont utilisé leurs mesures des chaleurs spécifiques (11) du Tl, pour vérifier l'hypothèse de la réversibilité. Si l'entropie croissait de ΔS pendant le cycle complet représenté sur la figure 3, le second membre de (3) ne serait plus égal à zéro mais à ΔS . Keesom et Kok ont obtenu :

T	$\int_{T_0}^T \frac{c_p - c_s}{T} dT$	$\left \frac{Q_r}{T} \right $	ΔS
2,11°	$140 \cdot 10^{-4} \frac{\text{cal}}{\text{Mol}^\circ\text{K}}$	$131 \cdot 10^{-4} \frac{\text{cal}}{\text{Mol}^\circ\text{K}}$	$9 \cdot 10^{-4} \frac{\text{cal}}{\text{Mol}^\circ\text{K}}$
1,91°	$207 \cdot 10^{-4}$	$181 \cdot 10^{-4}$	$26 \cdot 10^{-4}$

Cette augmentation relativement petite d'entropie a été attribuée par Keesom et Kok au fait que les conditions de l'expérience n'étaient pas idéales (champ magnétique non uniforme à cause de la forme géométrique de l'échantillon). Les mesures, susceptibles d'amélioration, ne montrent pas que la nature du phénomène soit irréversible et suggèrent de considérer le cas de réversibilité comme le cas idéal élémentaire.

Pour certains alliages, par exemple Bi + Pb, qui possèdent des courbes de transition très inclinées (environ 100 fois plus que pour les métaux purs) on trouve de gros écarts ⁽¹²⁾. Les discontinuités de chaleur spécifique ne sont pas encore trouvées dans ces alliages ; elles sont certainement très loin d'être 100² plus grandes que dans les métaux purs, comme on devrait s'y attendre d'après (7). De plus, ces alliages ne donnent pas un effet Meissner complet. C'est pourquoi nous sommes tentés de penser qu'ils ne représentent pas le cas élémentaire, mais quelque chose de très complexe, qui se ramène à des faits élémentaires si l'on tient compte de la présence de la structure interne complexe de ces alliages (cf. p. 47).

Pour un certain nombre de supra-conducteurs, Sn, Tl, In par exemple, mais non pour tous, la courbe de transition peut être représentée à peu près par une formule parabolique

$$H(T) = \alpha (T_0^2 - T^2)$$

c'est-à-dire

$$f_s - f_n = -\frac{\alpha^2}{2} (T_0^2 - T^2)^2$$

	α	T_0
Sn	7.2	3.69°
Tl	10.3	2.38°
In	7.4	3.37°

D'où l'on tire :

$$Q_r = -2 \alpha^2 T^2 (T_0^2 - T^2) V_m$$

$$c_s - c_n = 2 \alpha^2 T (3 T^2 - T_0^2) V_m$$

et en particulier pour la discontinuité de la chaleur spécifique :

$$\Delta c = (c_s - c_n)_{T=T_0} = 4 \alpha^2 T_0^3 V_m$$

La différence d'énergie entre le supra-conducteur et le corps normal est alors donnée par

$$U_s - U_n = -\frac{\alpha^2}{2} (T_0^2 - T^2) (3 T^2 + T_0^2) V_m$$

et la différence d'entropie :

$$S_s - S_n = -2 \alpha^2 T (T_0^2 - T^2) V_m$$

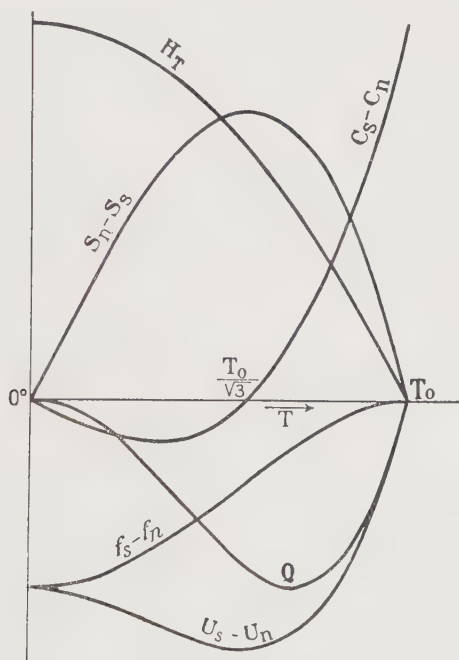


FIG. 4. — Les fonctions thermodynamiques d'un supra-conducteur.

Cette théorie simple satisfait donc au théorème de Nernst : Q s'annule pour $T = 0$, comme T^2 . La différence de chaleur spécifique change le signe pour $T = \frac{1}{\sqrt{3}} T_0$. C'est ce que montrent assez nettement les mesures de Keesom et Kok sur Tl.

§ 2. Les équations fondamentales de l'électromagnétisme dans un supra-conducteur ⁽¹³⁾

Dans les considérations du dernier paragraphe, nous aurions pu oublier complètement que nous nous occupions d'un phénomène de conductibilité électrique. Si l'effet Meissner avait été découvert plus tôt que le phénomène de la supra-conductibilité, celui-ci probablement aurait été interprété dès le commencement de façon très différente. L'idée que, dans un supra-conducteur, les électrons peuvent circuler comme des particules libres sans l'action permanente d'un champ extérieur, a toujours séduit plutôt par son absurdité sensationnelle que par son efficacité, quant à une meilleure compréhension de la mécanique des électrons supra-conducteurs.

Habituellement on exprime ce que nous a appris l'effet Meissner ($\mathbf{B} = 0$) en disant que le supra-conducteur se comporte comme un métal très fortement diamagnétique, à savoir comme un métal de perméabilité $\mu = 0$, ou de susceptibilité magnétique $\chi = -\frac{1}{4\pi}$. Bien que nous ne soyons pas du tout d'accord avec cette conception, elle nous rappelle en tout cas un fait bien connu : un corps diamagnétique représente un exemple démontrant la possibilité de courants permanents dans un système qui se trouve dans son état le plus stable (*). La contradiction apparente au théorème de Bloch (v. l'introduction) se lève, si l'on remarque que ce théorème traite d'un système sans champ extérieur élec-

(*) On sait que le diamagnétisme est une particularité de la mécanique quantique. On ne peut expliquer ce phénomène par aucun mécanisme de la mécanique classique.

trique ou magnétique. Dans un champ magnétique, il n'est évidemment pas valable, ou plutôt il est inapplicable. Cela suggère l'idée de chercher un rapport entre les supra-courants et les courants permanents des diamagnétiques et d'échapper ainsi aux anciennes difficultés. Mais, comme nous le montrerons, il n'est pas légitime de décrire simplement le supra-conducteur comme un diamagnétique caractérisé par une valeur particulière de la susceptibilité magnétique (v. la fin de ce § 2).

La description macroscopique que nous proposons considère le supra-courant comme toujours déterminé par un champ magnétique. Dans le cas de l'expérience de Meissner, le champ est établi du dehors. Dans le cas du courant annulaire permanent, le champ est produit par le courant lui-même. L'état le plus stable d'un anneau est un état sans courant, tant qu'aucun champ extérieur n'est établi ; ceci est en accord avec le théorème de Bloch. Les états dans lesquels l'anneau contient un courant permanent (sans champ extérieur) sont des états ne correspondant pas au minimum d'énergie libre (§ 3). Néanmoins, il faut les considérer comme des états stables au point de vue thermodynamique ; en effet, pour atteindre l'état d'énergie libre minimum, qui n'a pas de courant, il faudra passer par des états d'une énergie considérablement plus élevée.

Voici la forme de la relation que nous proposons entre l'induction magnétique **B** et la densité de courant **J** :

$$c \operatorname{rot} \Lambda \mathbf{J} = - \mathbf{B} \quad (\text{I})$$

où Λ est une constante positive, caractéristique du supra-conducteur, et dont nous indiquerons plus loin (§ 10) la signification. On trouvera alors pour l'ordre de grandeur de $\Lambda \approx 10^{-32}$ [sec²] ou une valeur plus élevée.

Ce qui caractérise le supra-conducteur, ce n'est donc pas une valeur particulière de la perméabilité, mais une *équation différentielle*. Comme nous le verrons (§ 10), cette équation exprime la même connexion entre la densité de courant et le champ magnétique que celle qui existe dans un atome diamagnétique isolé. Le supra-conducteur en bloc est considéré comme un seul immense atome diamagnétique. Peut-être le supra-conducteur est-il en outre capable de subir une polarisation atomique magnétique, résultant de l'action simultanée de dipôles magnétiques atomi-

ques induits. C'est seulement pour simplifier que nous ferons d'abord abstraction de cette possibilité en égalant l'induction magnétique au champ magnétique :

$$\mathbf{B} = \mathbf{H} \quad (9)$$

C'est-à-dire que nous poserons la perméabilité magnétique $\mu = 1$. Pour la même raison, nous poserons

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} \quad (10)$$

En outre, nous conservons les équations de Maxwell :

$$c \operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J} + \dot{\mathbf{D}} \quad (11)$$

$$c \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}} \quad (12)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho \quad (13)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad (14)$$

C'est seulement la loi d'Ohm qui est remplacée ici par l'équation (I) à laquelle nous ajouterons tout à l'heure un complément.

Éliminons $\mathbf{J}$ et $\mathbf{E}$ de I, (9), (11) et (12), nous obtenons :

$$\Delta c^2 (\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{B} + \frac{1}{c^2} \ddot{\mathbf{B}}) + \mathbf{B} = 0 \quad (15)$$

c'est-à-dire, comme $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$,

$$\Delta \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \ddot{\mathbf{B}} = \frac{1}{\Lambda c^2} \mathbf{B} \quad (15')$$

Dans le cas stationnaire, on a

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{B} + \frac{1}{\Lambda c^2} \mathbf{B} = 0 \quad \text{ou} \quad \Delta \mathbf{B} = \frac{1}{\Lambda c^2} \mathbf{B} \quad (15'')$$

Les solutions de cette équation, qui se comportent de façon régulière dans le domaine intérieur du supra-conducteur, s'évanouissent suivant une loi exponentielle très rapide de la surface vers l'intérieur.

Le champ magnétique $\mathbf{H} = \mathbf{B}$ est pratiquement nul à des distances de la surface dépassant $c/\sqrt{\Lambda}$ ($\approx 10^{-6}$ cm). Nous voyons ainsi que l'expérience de Meissner est représentable par l'équation (I), il est vrai avec une restriction acceptable : le champ magnétique ne tombe pas brusquement à la valeur zéro à la surface

même, mais de manière continue dans une couche étroite derrière celle-ci.

Formons le rotationnel de (15''), nous obtenons une équation correspondante pour $\mathbf{J}$, qui s'écrit dans le cas stationnaire :

$$\Delta c^2 \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{J} + \mathbf{J} = 0 \quad (16)$$

Les courants formant « écrans diamagnétiques » sont donc répartis dans le volume en arrière et au voisinage immédiat de la surface du supra-conducteur et, comme il est naturel, exactement jusqu'où pénètre le champ magnétique.

La conception que nous développons ici tient compte aussi simplement que possible de la *réversibilité* du phénomène de transition, ce que ne permettait pas l'hypothèse d'une conductibilité infinie ; dans un champ magnétique extérieur donné, il n'existe qu'un état *unique*, celui qui correspond au champ « gelé » égal à zéro.

On ne trouve, comme nous allons le montrer, de réversibilité complète que dans des supra-conducteurs *simplement connexes*. Par contre, pour des domaines supra-conducteurs annulaires à connexion multiple, nous déduirons (§ 3) de nos équations une certaine irréversibilité en grand, qui exprime de façon satisfaisante le fait de la persistance des courants permanents (ou du flux magnétique qu'ils embrassent) sans pour cela être en contradiction avec la réversibilité en petit qu'exige la thermodynamique.

Notre description du supra-conducteur n'est pas complète tant que nous ne satisfaisons pas, en outre de $\mathbf{B} = 0$, la condition $\mathbf{E} = 0$. En différenciant (I) par rapport au temps, on obtient

$$\operatorname{rot} (\Delta \dot{\mathbf{J}} - \mathbf{E}) = 0.$$

$\Delta \dot{\mathbf{J}} - \mathbf{E}$ peut donc être représentée comme le gradient d'un scalaire φ :

$$\Delta \dot{\mathbf{J}} - \mathbf{E} = \operatorname{grad} \varphi \quad (17)$$

On sera tenté de supposer qu'il faut écrire ici

$$\operatorname{grad} \varphi = 0 ; \quad (\text{II})$$

car cette hypothèse garantirait directement la disparition complète du champ électrique en régime stationnaire ($\dot{\mathbf{J}} = 0$). La

présence d'un champ électrique serait alors toujours accompagnée d'une accélération du courant (*):

$$\Lambda \dot{\mathbf{J}} = \mathbf{E} \quad (18)$$

Mais il existe encore une tout autre possibilité. Comparons (17) et (I), nous voyons que ces six équations peuvent se mettre sous forme tensorielle :

$$\Lambda c \left(\frac{\partial J_i}{\partial x_k} - \frac{\partial J_k}{\partial x_i} \right) = f_{ik}, \quad (19)$$

si nous identifions les composantes des champs $E_x, E_y, E_z, B_x, B_y, B_z$, avec $if_{14}, if_{24}, if_{34}, f_{23}, f_{31}, f_{12}$ et si nous désignons les coordonnées x, y, z , ici par x_1, x_2, x_3, x_4 . Le scalaire φ s'interpréterait alors comme la composante de temps de la densité de courant $\mathbf{J}$. On sait que c'est la densité de charge ρ qui joue ce rôle ; il faudrait poser :

$$\frac{\varphi}{ic\Lambda} = J_4 = ic\rho \quad (II')$$

Il est remarquable qu'on peut compléter l'équation (I) de manière à la rendre covariante, sans qu'il soit pour cela nécessaire de faire figurer explicitement l'état de mouvement du supraconducteur dans les équations, ce qui, on le sait, est impossible pour la loi d'Ohm dans le cas d'un conducteur ordinaire. D'autre part, il n'y a pas de raison de principe pour imposer au supraconducteur les mêmes propriétés de covariance qu'au vide. Il ne peut pas être question de considérer l'équation (II') comme une conséquence nécessaire de (I). Il faut la considérer expressément comme une *hypothèse indépendante*, remarquable il est vrai, par sa simplicité, mais qui ne peut se vérifier que par ses conséquences. Avec ce que nous savons actuellement de l'état supraconducteur, on ne peut guère présenter en faveur de l'hypothèse (II')

(*) On a tenté parfois (14) de décrire le passage à une conductibilité infinie par une équation de cette forme (18). Lorsque le frottement des électrons est très petit, on doit tenir compte de leur inertie. L'équation (18) fut interprétée en admettant que l'accélération des électrons libres est causée par la force électrique $e\mathbf{E}$. La constante Λ prend alors la valeur $\frac{m}{ne^2}$ (n = nombre d'électrons par cm^3). Mais il semblait impossible de généraliser cette conception de manière rationnelle pour le cas d'un champ magnétique.

vis-à-vis de (II) d'autre argument que celui-ci : elle interprète les faits expérimentaux connus, d'une manière plus simple et plus symétrique. Il suffit, pour décrire les faits, d'un système *unique* d'équations (19). Par contre les hypothèses I et II ne peuvent se condenser de même en une seule loi. C'est un peu plus tard seulement (§ 5) qu'une confrontation précise avec les faits nous permettra de trancher entre les deux formes de la théorie.

Avec l'hypothèse (II') nos équations de base s'écriront

$$\left. \begin{aligned} \Delta c \operatorname{rot} \mathbf{J} &= -\mathbf{B} \\ \Lambda(\mathbf{J} + c^2 \operatorname{grad} \rho) &= \mathbf{E} \end{aligned} \right\} \quad \begin{aligned} (19a) \text{ (I)} \\ (19b) \text{ (II')} \end{aligned}$$

Si l'on porte $\rho = \operatorname{div} \mathbf{E}$ dans (19b) et tient compte de

$$\mathbf{J} = c \operatorname{rot} \mathbf{H} - \ddot{\mathbf{E}} = -c^2 \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} - \ddot{\mathbf{E}} :$$

on obtient

$$\Delta c^2 (\Delta \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \ddot{\mathbf{E}}) = \mathbf{E} \quad (20)$$

Selon (II') le champ électrique vérifie donc la même équation que le champ magnétique [voir (15')]. Aussi ne pénètre-t-il dans le supra-conducteur qu'à une profondeur de $c\sqrt{\Lambda}$. Les équations (19) peuvent donc rendre compte d'une manière très symétrique de la disparition du champ électrique dans le supra-conducteur. En décrivant cette disparition de la même manière que l'effet Meissner, elles groupent ainsi en une unité parfaite à l'aide du système (19) les deux phénomènes fondamentaux de la supra-conductibilité : $\mathbf{E} = 0$ et $\mathbf{B} = 0$.

Le phénomène de la supra-conductibilité ne serait pas suffisamment caractérisé par la disparition pratiquement totale du champ électrique. L'essentiel est plutôt que cette disparition de $\mathbf{E}$ n'entraîne pas en même temps celle du courant. Contrairement à la loi d'Ohm, les équations (19) ne posent *a priori* aucune relation entre $\mathbf{E}$ et $\mathbf{J}$ en régime stationnaire : $\mathbf{J}$ n'est lié qu'à $\mathbf{H}$. A l'opposé de la conductibilité ordinaire, dans un supra-conducteur les grandeurs électriques ($\mathbf{E}$, ρ) et magnétiques ($\mathbf{H}$, $\mathbf{J}$) se séparent radicalement, même dans le cas stationnaire, et l'on voit que nos équations admettent des *courants électriques, sans champs électriques*.

La détermination des courants et des champs se fait en régime stationnaire de la manière suivante :

Il faut d'abord déterminer $\mathbf{E}$ à l'extérieur [et, éventuelle-

ment, en cas de l'hypothèse (II'), à l'intérieur] du supra-conducteur en utilisant des conditions à la surface convenables (§ 4).

Puis $\mathbf{H}$ est déterminé à l'extérieur par

$$c \operatorname{rot} \mathbf{H} = \sigma \mathbf{E} \quad \text{et} \quad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0$$

et à l'intérieur par

$$\Delta c^2 \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{H} + \mathbf{H} = 0 \quad (16)$$

et par la condition aux limites : « H_n et H_{tg} continus » (§ 4). On peut démontrer que les champs sont ainsi déterminés univoquement. Alors la distribution du courant à l'intérieur du supra-conducteur est donnée par

$$\mathbf{J} = c \operatorname{rot} \mathbf{H}.$$

La continuité de J_n à la surface du supra-conducteur est garantie par la continuité de H_{tg} .

La description donnée ici est tout à fait différente de la conception d'après laquelle la supra-conductibilité est caractérisée par un diamagnétisme de perméabilité $\mu = 0$. Pour un supra-conducteur simplement connexe, il est vrai, les deux conceptions donnent des résultats macroscopiques identiques dans le cas des phénomènes purement magnétiques. Mais pour des supra-conducteurs *multiplement connexes* les deux conceptions diffèrent essentiellement :

$\mu = 0$ signifierait $\frac{\mathbf{B}}{H} = 0$, où H_{tang} doit être continu sur la surface du supra-conducteur. Considérons un cylindre creux dans un champ magnétique extérieur longitudinal : Avec une valeur quelconque de μ , comme avec $\mu = 0$, le champ $\mathbf{H}$ devrait avoir la même valeur partout, à l'intérieur, à l'extérieur et dans le corps cylindrique lui-même, tandis que $\mathbf{B}$ saute à la valeur $\mu \mathbf{H}$ dans le métal.

Dans notre théorie, d'autre part, $\mathbf{H}$ décroît, conjointement avec $\mathbf{B}$, de façon continue, de la surface du supra-conducteur vers l'intérieur jusqu'à une valeur nulle, et peut avoir des valeurs différentes dans l'espace creux et à l'extérieur.

C'est le caractère essentiel de la théorie proposée : la même corrélation (I) entre courant et champ magnétique, qui représente l'effet Meissner et qui pour des supra-conducteurs simplement connexes est pratiquement identique avec la description

$\mu = 0$, est capable en outre de décrire la distribution des courants permanents dans les anneaux. Le champ magnétique de ces anneaux, ayant un rotationnel, requiert, selon la théorie de Maxwell, l'introduction explicite du *courant macroscopique* ; il ne peut naturellement pas être décrit uniquement par une perméabilité diamagnétique.

§ 3. Anneaux supra-conducteurs. Conservation du flux magnétique à travers un anneau (¹⁹)

Nous allons maintenant traiter le problème des courants persistants, ou, pour mieux dire, des flux magnétiques constants. D'après l'interprétation de l'effet Meissner, qui sert de base à nos raisonnements, il n'y a pratiquement pas de flux magnétique à l'intérieur d'un supra-conducteur. Nous considérons l'existence de champs magnétiques « congelés » comme provenant uniquement

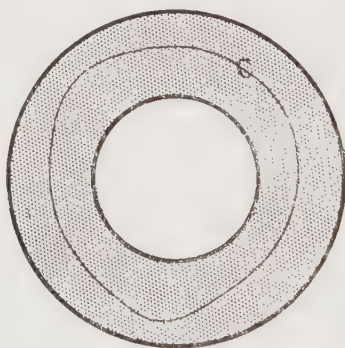


FIG. 5.

de la présence d'occlusions non supra-conductrices, soit que la forme du domaine supra-conducteur soit telle qu'il entoure des régions non supra-conductrices, soit que les lignes de force du champ magnétique soient tellement resserrées dans un petit domaine du supra-conducteur que le champ magnétique y atteigne la valeur critique, ce qui entraîne la disparition de la supra-conductibilité.

Considérons un supra-conducteur *multiplement connexe*,

par exemple un anneau, et dans cet anneau une courbe fermée C , qu'on ne puisse ramener à un point par déformation continue sans sortir de l'anneau. Une surface S qui s'appuie sur C comme courbe-limite, est partiellement dans une région supra-conductrice, partiellement, au voisinage de C , dans une région non supra-conductrice. Mais sur toute cette surface, les équations de Maxwell sont valables. En intégrant $c \operatorname{rot} \mathbf{E} = - \dot{\mathbf{B}}$ sur la surface S et en appliquant le théorème de Stokes, on obtient pour le changement du flux magnétique :

$$\iint_S \dot{\mathbf{B}}_n d\sigma = - c \oint_C \mathbf{E}_s ds$$

L'intégrale du second membre est étendue à un domaine entièrement supra-conducteur, pour lequel on a, d'après l'hypothèse (II') ou (10b) :

$$\mathbf{E}_s = \Lambda \dot{\mathbf{J}}_s + \Lambda c^2 \frac{\partial \rho}{\partial s}$$

Si l'on porte cette valeur dans l'intégrale curviligne, l'intégration du terme $\Lambda c^2 \frac{\partial \rho}{\partial s}$ sur la courbe fermée C donne zéro et l'on obtient :

$$\iint_S \dot{\mathbf{B}}_n d\sigma = - \Lambda c \oint_C \dot{\mathbf{J}}_s ds \quad (22)$$

On aurait obtenu le même résultat en adoptant l'hypothèse (II), c'est-à-dire en supprimant de prime abord le terme en $\frac{\partial \rho}{\partial s}$.

L'intégration par rapport au temps donne :

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{B}_n(t) d\sigma + \Lambda c \oint_C \mathbf{J}_s(t) ds = \\ \iint_S \mathbf{B}_n(t_0) d\sigma + \Lambda c \oint_C \mathbf{J}_s(t_0) ds = \text{Const.} \end{aligned} \quad (23)$$

Ce n'est donc pas le flux magnétique, mais plus précisément la grandeur

$$\iint_S \mathbf{B}_n d\sigma + \Lambda c \oint_C \mathbf{J}_s ds \quad (24)$$

qui est conservatrice. Il résulte de $\Lambda c \operatorname{rot} \mathbf{J} = - \mathbf{B}$, grâce au théorème de Stokes, que sa valeur ne dépend pas de la position de C dans l'anneau.

Supposons l'anneau assez épais et la courbe C assez éloignée

de la surface, pour que nous puissions négliger les valeurs des champs et des courants sur C , en comparaison de celles qui règnent à la surface. [Ces valeurs décroissent exponentiellement vers l'intérieur à partir de la surface.] Si l'épaisseur de l'anneau est de 1 mm, le rapport des valeurs des courants et des champs

à l'intérieur et sur la surface a pour valeur $e^{-\frac{0.1}{c\sqrt{\Delta}}}$: 1 c'est-à-dire $e^{-10,000}$: 1. Par ce choix de la courbe C nous pouvons toujours négliger J_s sur C et nous obtenons

$$\iint B_n(t) d\sigma = \iint B_n(t_0) d\sigma \quad (23')$$

Un flux magnétique, une fois réalisé dans l'anneau, reste constant pour tous les temps quels que soient les champs perturbateurs appliqués de l'extérieur, tant qu'ils ne dépassent pas la valeur critique. L'anneau se comporte comme un aimant permanent.

Dans la démonstration de la loi de conservation (23), nous n'avons pas encore utilisé le fait que le supra-conducteur est multiplement connexe. Effectivement l'équation (23) est valable pour toute surface bordée par une courbe située dans un domaine supra-conducteur. Mais dans un supra-conducteur simplement connexe, les flux magnétiques ne sont pas seulement constants, ils sont nuls. Pour obtenir un flux magnétique non nul, il faut que la surface traverse un domaine non supra-conducteur et que sa frontière soit située dans un anneau supra-conducteur.

L'équation (23) pourrait aussi provenir de l'intégration d'une équation $\Delta c \operatorname{rot} \mathbf{J} = -\dot{\mathbf{B}}$. Mais pour cela, celle-ci devrait être valable sur toute la surface S . En réalité, une telle équation ne peut s'appliquer au trou de l'anneau ; en revanche, à l'intérieur de l'anneau lui-même, on a l'équation plus restrictive $\Delta c \operatorname{rot} \mathbf{J} = -\mathbf{B}$. Si l'on essayait d'interpréter la supra-conductibilité comme une accélération sans frottement de charges ponctuelles, dans le champ électrique, en écrivant seulement l'équation $\Delta \mathbf{J} = \mathbf{E}$ comme équation fondamentale (voir p. 22, note *), on obtiendrait seulement l'équation $\Delta c \operatorname{rot} \mathbf{J} = -\dot{\mathbf{B}}$, qui entraînerait l'existence de champs magnétiques congelés à l'intérieur du supra-conducteur lui-même, contrairement à la découverte de l'effet Meissner.

En prenant comme base de la théorie l'équation (I) nous éliminons à priori tout champ magnétique macroscopique congelé à l'intérieur du supra-conducteur. Il ne peut en exister que dans des domaines non supra-conducteurs entourés par des supra-conducteurs multiplement connexes.

On pourrait ainsi décrire le comportement macroscopique d'un supra-conducteur *poreux* (alliages ?) par l'équation $\Delta c \operatorname{rot} \mathbf{J} = -\dot{\mathbf{B}}$. Mais dans ce cas nous considérerions cette équation non pas comme conséquence d'une équation d'accélération, mais comme le résultat d'une *moyenne* prise à l'aide de l'équation (22) sur un domaine de structure *inhomogène*, qui contient des inclusions microscopiques non supra-conductrices.

Des supra-conducteurs en forme d'anneau, comprenant des flux magnétiques, ne se trouvent naturellement *pas en équilibre thermodynamique absolu*. Mais l'énergie libre a un minimum relatif pour des variations virtuelles infiniment petites des lignes de courant. Les courants persistants doivent être considérés comme métastables, dans le même sens qu'un tableau accroché au mur par un clou : il faut l'apport d'une énergie *finie*, par exemple l'échauffement jusqu'à la température critique ou la coupure de l'anneau, pour libérer l'énergie magnétique du flux contenue dans l'anneau.

Dans les équations (19), le champ de force électromagnétique f_{ik} dans le supra-conducteur est représenté par le quadri-vecteur $\mathbf{J}_i$ exactement comme par les quatre composantes du potentiel $\Phi_i = A_1, A_2, A_3, i\varphi$ (*)

$$f_{ik} = \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_i} - \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_k}$$

$$\text{ou} \quad \mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A} \quad \mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi - \frac{1}{c} \dot{\mathbf{A}}$$

Mais le quadri-vecteur courant est absolument déterminé ; les potentiels, par contre, peuvent toujours être remplacés par des valeurs équivalentes Φ'_i :

$$\Phi'_i = \Phi_i + \frac{\partial k}{\partial x_i} \quad (25)$$

où k est une fonction uniforme, arbitraire des quatre coordon-

(*) En adoptant l'hypothèse II, on a $\varphi = 0$.

nées. Si l'on veut garder la condition auxiliaire $\sum \frac{\partial \Phi'_i}{\partial x_i} = 0$, il faut imposer à k la condition

$$\Delta k - \frac{1}{c^2} \ddot{k} = 0 \quad (26)$$

Dans une région supra-conductrice *simplement connexe*, on peut toujours disposer de k , de manière que, non seulement les rotationnels de Φ_i et de J_i mais les Φ_i et J_i eux-mêmes soient proportionnels :

$$\Phi_i = -\Lambda c J_i \quad (27')$$

Mais dans des supra-conducteurs *multiplément connexes*, cela n'est pas généralement possible. On peut avoir ici, par exemple :

$$\iint H_n d\sigma = \oint \mathbf{A}_s ds \neq 0 \quad \text{et simultanément} \quad \oint \mathbf{J}_s ds \approx 0,$$

si seulement la courbe frontière se trouve à une profondeur suffisante dans le supra-conducteur [cf. (23) et (23').] $c \Lambda \mathbf{J}$ et $-\mathbf{A}$ ayant mêmes rotationnels dans le supra-conducteur, doivent donc différer du gradient d'une fonction v *multiforme* des coordonnées d'espace, qui, après parcours d'un circuit entourant le trou non supra-conducteur, varie d'une quantité $v_1 - v_2$ égale au flux magnétique F dans ce trou :

$$\Lambda c \mathbf{J} + \mathbf{A} = \text{grad } v \quad (27)$$

On peut ici encore effectuer un choix particulier de $\mathbf{A}$ qui généralise la condition $\mathbf{A} = -\Lambda c \mathbf{J}$ pour les supra-conducteurs simplement connexes : nous posons dans l'intérieur du supra-conducteur :

$\text{div} (\mathbf{A} + \Lambda c \mathbf{J}) = 0$ en plus de $\text{rot} (\mathbf{A} + \Lambda c \mathbf{J}) = 0$
et sur la surface :

$$\mathbf{A}_n + \Lambda c \mathbf{J}_n = 0$$

ce qui donne pour v les conditions suivantes :

Dans le supra-conducteur :

$$\Delta v = 0$$

et à la surface :

$$\frac{\partial v}{\partial n} = 0$$

Finalement, imposons à v la condition que sa variation soit égale au flux F_i dans le trou i [ou, plus exactement, égale à la quantité conservative (24)], lorsqu'on décrit un circuit entourant ce trou. Alors, v est déterminé univoquement, grâce aux théorèmes bien connus de la théorie des fluides irrotationnels, et est grâce à la loi de la conservation du flux indépendant du temps. Dans un supra-conducteur *simplement connexe*, on obtient en particulier **uniquement** la solution $v = \text{const.}$, c'est-à-dire $\Delta c \mathbf{J} = -\mathbf{A}$.

§ 4. Les conditions aux limites. Charges en volume ou superficielles?

En résumé, nous pouvons affirmer que nos hypothèses (II) et (II') paraissent jusqu'à présent convenir également à décrire, avec (I), l'ensemble des faits fondamentaux de l'état supra-conducteur pur, c'est-à-dire : 1° l'effet Meissner ($\mathbf{B} = 0$); 2° la disparition du champ électrique ($\mathbf{E} = 0$); 3° les courants permanents dans des anneaux supra-conducteurs (conservation du flux magnétique). Ces phénomènes grossiers ne permettent pas de décider entre les hypothèses (II) et (II').

Il est impossible de discuter proprement la question d'une décision expérimentale entre les deux formules avant d'avoir posé clairement les conditions à la surface des supra-conducteurs.

Evidemment, la théorie de Maxwell exige comme toujours la *continuité* des composantes tangentielles de $\mathbf{E}$ et $\mathbf{H}$ et des composantes normales de $\mathbf{J} + \mathbf{D}$.

Conformément à la condition de Maxwell « B_n continu » nous allons admettre que H_n est continu, dans la mesure où l'on peut considérer comme négligeable la susceptibilité magnétique du milieu adjacent, car nous avons posé $\mathbf{H} = \mathbf{B}$ dans le supra-conducteur. Par ces conditions le champ magnétique à l'intérieur du supra-conducteur est relié de façon univoque à l'extérieur.

Il subsiste quelque incertitude sur la condition aux limites relative à D_n ou E_n . En effet, $\mathbf{D}$ n'est pas défini immédiatement dans les conducteurs. Dans la théorie de Maxwell, pour obtenir une solution, on est obligé de supposer qu'il existe à la surface des conducteurs, ou à la surface de séparation de conducteurs

différents parcourus par des courants, des charges superficielles « libres », c'est-à-dire des discontinuités de E_n .

De même dans notre théorie, avec l'hypothèse (II), il n'existe de solution que si l'on admet des discontinuités de E_n car en régime stationnaire $\mathbf{E}$ s'annule à l'intérieur du supra-conducteur.

Par contre, dans l'hypothèse (II'), il est possible formellement de prolonger d'une manière absolument continue le champ électrique à travers la surface de séparation de manière analogue au champ magnétique : le premier s'évanouirait alors sur des charges réparties en un volume étroit derrière la surface. Du point de vue macroscopique, ces charges en volume se distribueraient le long de la surface exactement comme les charges superficielles du cas (II). Si l'on admettait en outre des discontinuités de E_n , la solution serait indéterminée, le champ pouvant s'évanouir en partie sur des charges en volume, en partie sur des charges superficielles, à moins que l'on ne suppose que ces dernières existent seules. On peut démontrer par un raisonnement thermodynamique général ⁽¹⁵⁾ qu'à la surface séparant un supra-conducteur d'un *conducteur normal*, la densité en volume doit être nulle. Par contre il est possible d'admettre E_n continu à la surface de séparation du supra-conducteur et de l'isolant et c'est la seule hypothèse raisonnable, car s'il n'en était pas ainsi, il n'apparaîtrait jamais de champs électrostatiques dans les supra-conducteurs et l'on serait ramené immédiatement à l'hypothèse (II). La distinction entre (II) et (II') n'a de signification que si la dernière implique la continuité de E_n entre le supra-conducteur et l'isolant.

D'après l'hypothèse (II'), on traite le supra-conducteur pour ainsi dire comme un *isolant* avec E_n (ou D_n) continu vers le vide, E_n discontinu vers le conducteur voisin (avec la condition aux limites $\rho = 0$); dans l'hypothèse (II) au contraire E_n peut être discontinu, comme pour un *conducteur ordinaire*.

§ 5. Le condensateur supra-conducteur

Pour trancher entre ces deux conceptions, il faut faire une expérience qui permette de mettre en évidence avec précision la distribution des charges.

Il suffit pour cela de mesurer la capacité d'un condensateur à armatures supra-conductrices. Considérons pour simplifier une capacité formée par une sphère de rayon a portant une charge e . Dans le cas statique, nous obtenons à partir de (II') ou (20)

$$\Delta \mathbf{E} = \beta^2 \mathbf{E} \quad \text{avec} \quad \beta^2 = \frac{1}{\Lambda c^2},$$

c'est-à-dire

$$\Delta \varphi = \beta^2 (\varphi - \varphi_0)$$

dans le supra-conducteur et

$$\Delta \varphi = 0$$

à l'extérieur.

Nous avons posé $\mathbf{E} = - \text{grad } \varphi$, la constante φ_0 peut être choisie de manière à avoir $\varphi = 0$ à l'infini.

D'après les conditions du paragraphe précédent, on doit avoir en outre φ et $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ continus à la surface de la sphère ($r = a$). Comme la symétrie du problème est sphérique, nous obtenons à l'intérieur du conducteur, pour $\varphi(r)$, l'équation

$$\varphi'' + \frac{2}{r} \varphi' - \beta^2 (\varphi - \varphi_0) = 0$$

dont la seule solution régulière s'écrit

$$\varphi = \varphi_0 \left(1 + K \frac{\text{Sinh } \beta r}{\beta r} \right) \quad \text{pour } r \leq a.$$

A l'extérieur, on a :

$$\varphi = \frac{e}{4 \pi r} \quad \text{pour } r \geq a$$

Les conditions de continuité à la surface donnent

$$\varphi_0 = \frac{e}{4 \pi a} \frac{1}{1 - \frac{\text{Tgh } \beta a}{\beta a}}$$

$$K = - \frac{1}{\text{Cosh } \beta a}$$

φ_0 est le potentiel à l'intérieur de la sphère.

La capacité C a pour valeur

$$C = \frac{e}{\varphi_0} = 4 \pi a \left(1 - \frac{1}{\beta a} \text{Tgh } \beta a \right) \sim 4 \pi a \left(1 - \frac{1}{\beta a} \right)$$

Elle est réduite dans le rapport $1 - \frac{1}{\beta a}$ quand on passe de l'état normal à l'état supra-conducteur, ce qui est très plausible : tout se passe comme si le rayon de la sphère était diminué de l'épaisseur $\frac{1}{\beta} = c/\bar{\Lambda}$ de la couche électrique.

On prévoit donc, d'après l'hypothèse (II'), qu'à l'apparition de la supra-conductibilité la charge superficielle de la sphère se répartirait soudain en volume dans la couche voisine de la surface, d'où une brusque variation de capacité. D'après l'hypothèse (II), au contraire, la distribution des potentiels resterait celle de l'état normal

$$\varphi = \frac{e}{4 \pi a} \quad \text{pour } r \leq a$$

et la capacité serait invariable.

Cette expérience a été faite récemment ⁽¹⁶⁾. Bien entendu, on ne s'est pas servi d'une sphère mais d'un condensateur plan dont les plateaux étaient à une très faible distance. Celle-ci équivalait à 3.10^{-4} cm d'air. Le supra-conducteur était du mercure. Une variation de capacité correspondant à un changement de la distance (épaisseur de la couche $c/\bar{\Lambda}$) de 10^{-7} cm. aurait encore pu être décelée avec certitude. Le résultat de l'expérience fut négatif. Il faut donc en conclure que le condensateur garde sans changement la distribution superficielle des charges du conducteur normal.

Cette expérience nous conduit à abandonner dorénavant l'hypothèse (II') et d'adopter de préférence (II). Celle-ci est un peu plus compliquée que (II'), car elle ne peut pas être condensée avec (I) sous forme d'une loi unique.

Faut-il conclure du résultat expérimental qu'il n'existe jamais de charges en volume dans les supra-conducteurs? (II) se distingue de (II') par l'absence du *terme* en grad ρ de (19b). Ceci n'entraîne pas nécessairement $\rho = 0$. En formant la divergence de l'équation $\mathbf{E} - \Lambda \dot{\mathbf{J}} = 0$ et tenant compte de l'équation de continuité, on obtient seulement

$$\rho + \Lambda \ddot{\rho} = 0 \quad (28)$$

Il en résulte encore la possibilité de certaines charges en volume : celles-ci oscillent périodiquement avec une fréquence $\Lambda^{-1/2} \sim 10^{16}$ par sec. Nous allons montrer que ces charges ne peuvent se manifester par aucun phénomène extérieur au supra-conducteur.

En effet le courant $\mathbf{J}$ lié à ces charges oscille avec la même fréquence $\Lambda^{-1/2}$:

$$\mathbf{J} + \Lambda \ddot{\mathbf{J}} = 0$$

Comme $\Lambda \dot{\mathbf{J}} - \mathbf{E} = 0$, il en résulte :

$$\mathbf{J} + \dot{\mathbf{E}} = 0 \quad (29)$$

Les courants de déplacement et de conduction donnent pour cette fréquence (et pour celle-là seulement) *un courant total nul*. Donc

$$\text{rot } \mathbf{H} = 0$$

en plus de $\text{div } \mathbf{H} = 0$; le champ magnétique est donc entièrement déterminé par sa valeur à l'infini. S'il n'y a pas de champ extérieur, on a

$$\mathbf{H} = 0$$

Pour le champ électrique, il résulte de ce qui précède que

$$\text{rot } \mathbf{E} = 0 ;$$

$\text{div } \mathbf{E}$ peut être différent de zéro à l'intérieur du supra-conducteur ; mais à sa surface limite nous avons :

a) Vers le diélectrique : $E_n = 0$ car $\mathbf{J} + \dot{\mathbf{E}} = 0$ et $J_n = 0$;

b) Vers le conducteur normal : $\dot{\mathbf{E}}_n + \mathbf{J}_n = 0$, conséquence de (29).

Il ne sort donc nulle part aucune action du supra-conducteur.

Il est donc impossible de rien connaître à l'extérieur des charges dont l'existence est compatible avec (28). Le supra-conducteur agit sur le milieu environnant comme si l'on avait en son intérieur

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \rho = 0 \quad (\text{III})$$

Nous ajouterons cette équation à nos hypothèses fondamentales car elle représente une simplification formelle notable de la théorie sans conduire à aucun phénomène observable nouveau.

Nous aurons maintenant

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{E} &= 0 \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0 \\ \operatorname{div} \mathbf{J} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

et de

$$(\text{I}) \quad c \operatorname{rot} \Lambda \mathbf{J} = -\mathbf{B}$$

$$(\text{II}) \quad \Lambda \dot{\mathbf{J}} = \mathbf{E}$$

il résulte à l'aide des équations de Maxwell :

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{1}{c^2} \ddot{\mathbf{E}} + \frac{1}{\Lambda c^2} \mathbf{E} &= 0 \\ \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{B} + \frac{1}{c^2} \ddot{\mathbf{B}} + \frac{1}{\Lambda c^2} \mathbf{B} &= 0 \\ \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{J} + \frac{1}{c^2} \ddot{\mathbf{J}} + \frac{1}{\Lambda c^2} \mathbf{J} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

Les seuls champs électriques qui apparaissent dans les supra-conducteurs sont donc ceux qui sont *induits* par des processus variables dans le temps. Ils peuvent être représentés par un potentiel vecteur $\mathbf{A}$ dans la forme $\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \dot{\mathbf{A}}$, le champ magnétique étant donné par $\mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$ et $\mathbf{A}$ obéissant à la condition de Maxwell : $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$.

Si l'on ajoute à la théorie l'hypothèse (III), il ne reste évidemment plus aucune différence entre (II) et (II').

Comme *application simple* de la théorie nous étudierons la distribution du courant dans une sphère supra-conductrice noyée dans un conducteur normal indéfini parcouru, à grande distance

de la sphère, par un courant uniforme. Soit a le rayon de la sphère.

Le potentiel φ du champ électrique est déterminé par

$$\begin{aligned}\Delta\varphi &= 0 & \text{pour} & & r \geq a \\ \varphi &= \text{Const} & \text{pour} & & r \leq a\end{aligned}$$

Les conditions aux limites sont :

A l'infini

$$\varphi = -r E \cos \vartheta \quad \text{pour } r \rightarrow \infty$$

où E est l'intensité du champ uniforme à l'infini.

A la surface de la sphère

$$\varphi \text{ continu} \quad \text{pour } r = a$$

on en déduit

$$\begin{aligned}\varphi &= E \left(\frac{a^3}{r^2} - r \right) \cos \vartheta & \text{pour } r \geq a \\ \varphi &= 0 & \text{pour } r \leq a\end{aligned}$$

Le courant $\mathbf{J}$ est déterminé indirectement par le champ magnétique. Dans l'espace extérieur nous avons :

$$c \cdot \text{rot } \mathbf{H} = -\sigma \text{ grad } \varphi \quad \text{et} \quad \text{div } \mathbf{H} = 0 \quad \text{pour } r \geq a$$

dans l'espace intérieur :

$$\text{rot rot } \mathbf{H} + \beta^2 \mathbf{H} = 0 \quad \text{pour } r \leq a$$

Avec la condition à la surface « $\mathbf{H}$ continu » on obtient :

$$H = H_\varphi = -\frac{\sigma}{c} E \left(\frac{r}{2} + \frac{a^3}{r^2} \right) \cdot \sin \vartheta \quad r \geq a$$

$$H = H_\varphi = \frac{K}{2c\beta r} \left(\frac{\text{Sinh } \beta r}{\beta r} - \text{Cosh } \beta r \right) \sin \vartheta \quad r \leq a$$

$$K = -\frac{3\sigma a E}{\text{Sinh } \beta a} \frac{(\beta a)^2}{1 - \beta a \text{ Ctgh } \beta a}$$

Pour $r \leq a$ on en déduit, à cause de $\mathbf{J} = c \cdot \text{rot } \mathbf{H}$:

$$\mathbf{J}_r = \frac{K \cos \vartheta}{\beta^2 r^2} \left[\frac{\text{Sinh } \beta r}{\beta r} - \text{Cosh } \beta r \right]$$

$$\mathbf{J}_\theta = \frac{K \sin \vartheta}{2r} \left[\left(1 + \frac{1}{(\beta r)^2} \right) \text{Sinh } \beta r - \frac{1}{\beta r} \text{Cosh } \beta r \right]$$

Pour $r \geq a$ on a naturellement $\mathbf{J} = -\sigma \text{ grad } \varphi$

Les lignes de courant sont représentées sur la figure 6 ci-contre. Nous avons posé $\beta a = 20$, c'est-à-dire admis que « l'épaisseur de la couche » était $\frac{1}{20}$ du rayon de la sphère. Pour des sphères de dimensions macroscopiques, le courant passera encore plus près de la surface que nous n'avons pu le dessiner ici.

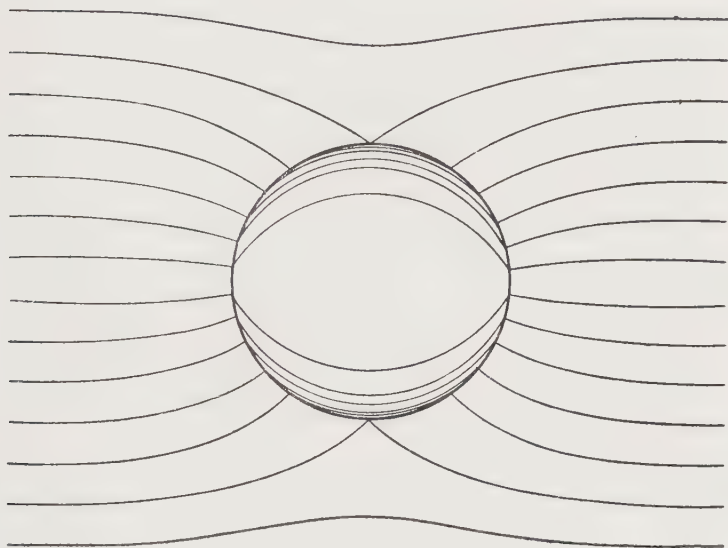


FIG. 6. — Distribution du courant dans une sphère supra-conductrice noyée dans un conducteur normal parcouru par un courant uniforme.

Autre exemple : distribution dans un fil cylindrique supra-conducteur du courant amené par deux conducteurs normaux cylindriques de même diamètre. Le résultat dessiné figure 7 peut être représenté analytiquement par des séries de fonctions de Bessel à argument imaginaire pur.

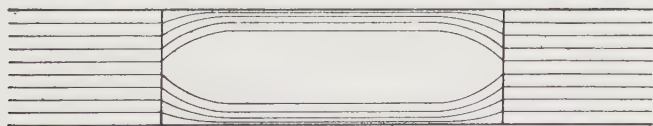


FIG. 7. — Distribution du supra-courant dans un fil cylindrique.

§ 6. Conservation de l'énergie et de l'impulsion Tenseur des pressions

Le principe de l'énergie se déduit pour les supra-conducteurs des équations de Maxwell par la méthode habituelle. Mais dans l'équation

$$\operatorname{div} c [\mathbf{EH}] + \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{1}{2} (\mathbf{H}^2 + \mathbf{E}^2) \right\} = - (\mathbf{JE})$$

le terme $(\mathbf{JE})$ ne peut plus s'interpréter comme chaleur de Joule.

Comme $\mathbf{E} = \Lambda \dot{\mathbf{J}}$ nous avons

$$(\mathbf{JE}) = \Lambda \mathbf{JJ} = - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\Lambda}{2} \mathbf{J}^2 \right)$$

Cette expression est positive quand s'établit le supra-courant, négative quand il est coupé. Nous appellerons le terme $\frac{\Lambda}{2} \mathbf{J}^2$ « énergie cinétique du supra-courant » et l'adjoindrons au premier membre de l'équation de l'énergie à laquelle nous donnerons la forme

$$\operatorname{div} c [\mathbf{EH}] + \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{1}{2} (\mathbf{H}^2 + \mathbf{E}^2 + \Lambda \mathbf{J}^2) \right\} = 0 \quad (32)$$

A l'intérieur du supra-conducteur, l'énergie ne se transforme pas en chaleur, mais s'accumule sous forme d'énergie cinétique des supra-courants.

Faisons subir une transformation analogue au principe de l'impulsion qui s'écrit comme on sait

$$\operatorname{Div} \left\{ \mathbf{T}(\mathbf{H}) + \mathbf{T}(\mathbf{E}) \right\} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{c} [\mathbf{EH}] = \rho \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{JH}]$$

en utilisant la notation abrégée

$$T_{ik}(\mathbf{H}) = H_i H_k - \frac{1}{2} \delta_{ik} H^2 \quad \delta_{ik} = \begin{cases} 1, & i = k \\ 0, & i \neq k \end{cases}$$

et en désignant par $\text{Div } \mathbf{T}$ la divergence tensorielle $\sum_k \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k}$.

Notre théorie implique une action très caractéristique du champ sur les courants :

En tenant compte de $\rho = 0$ et $\Lambda c \text{ rot } \mathbf{J} = -\mathbf{H}$ on obtient comme action de la « force de Lorentz » :

$$\rho \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{JH}] = -\Lambda [\mathbf{J} \times \text{rot } \mathbf{J}] = \Lambda \text{Div } \mathbf{T}(\mathbf{J}) \quad (33)$$

En nous appuyant sur (33) nous donnerons au théorème de l'impulsion la forme suivante

$$\text{Div} \left\{ \mathbf{T}(\mathbf{H}) + \mathbf{T}(\mathbf{E}) - \Lambda \mathbf{T}(\mathbf{J}) \right\} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{c} [\mathbf{EH}] = 0 \quad (34)$$

Nous appellerons la grandeur

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}(\mathbf{H}) + \mathbf{T}(\mathbf{E}) - \Lambda \mathbf{T}(\mathbf{J}) \quad (35)$$

le « tenseur des pressions » dans le supra-conducteur et nous interpréterons le théorème de l'impulsion comme suit :

A l'intérieur du supra-conducteur, les « forces d'inertie » $\Lambda \text{Div } \mathbf{T}(\mathbf{J})$ des courants équilibrent les forces électromagnétiques $\text{Div} \{ \mathbf{T}(\mathbf{E}) + \mathbf{T}(\mathbf{H}) \}$. En régime stationnaire la divergence des tensions $\mathbf{T}$ y devient nulle.

A la surface du supra-conducteur, le tenseur des pressions saute de la valeur (35) à sa valeur habituelle, qui ne dépend pas explicitement de $\mathbf{J}$. Il peut donc y présenter une divergence superficielle. Nous avons donc affaire ici à de *pures forces superficielles* à la surface du supra-conducteur, quoique le champ magnétique se prolonge de manière continue en son intérieur et y agisse sur des courants distribués en volume. C'est le terme complémentaire $-\Lambda \mathbf{T}(\mathbf{J})$ qui assure la transmission jusqu'à la surface des pressions dues aux forces de volume et leur transformation en forces superficielles.

Il est très remarquable que les forces d'inertie $\Lambda [\mathbf{J} \times \text{rot } \mathbf{J}]$ soient capables d'équilibrer en particulier des pures forces magnétiques. Jusqu'à présent, on n'a pas cru cela possible et l'on s'est étonné de ne pas trouver d'effet Hall dans les supra-conduc-

teurs ⁽¹⁷⁾. Nous voyons ici que la force de Biot et Savart n'est pas compensée par l'action d'un champ électrique, mais seulement par les effets d'inertie des courants permanents.

Il est impossible d'interpréter ce résultat en considérant l'action habituelle de la force de Lorentz sur des charges ponctuelles mobiles sans frottement et en se servant de la *cinématique classique* pour passer de l'accélération « substantielle » subie par les particules libres elles-mêmes à l'accélération « locale » de la densité de courant en un point. Si l'on calculait une telle action on aboutirait à des formules très compliquées et contraires d'ailleurs à l'expérience. Mais nous verrons au § 10 qu'on peut donner des rapports exprimés par (33) une interprétation très simple en *cinématique quantique*.

Nous pouvons unir à la manière habituelle le tenseur des pressions avec le flux et la densité de l'énergie en un schéma symétrique à quatre dimensions, le *tenseur d'impulsion-énergie* :

$$\Theta_{ik} = \sum_r f_{ir} f_{kr} - \frac{1}{4} \delta_{ik} \sum_{rs} f_{rs}^2 - \Lambda \left(J_i J_k - \frac{1}{2} \delta_{ik} \sum_r J_r^2 \right) \quad (36)$$

où il faut, d'après (III), poser $J_4 = 0$. Le principe de *conservation de l'impulsion-énergie* (32) (34) prend la forme

$$\sum_k \frac{\partial \Theta_{ik}}{\partial x_k} = 0 \quad (37)$$

Finalement on déduit l'identité :

$$\sum_k \Theta_{kk} = 0. \quad (38)$$

§ 7. Le mécanisme de la transformation des phases (1°)

On ne peut pas encore dire d'une façon sûre si l'on peut décrire la supra-conductibilité d'une manière satisfaisante avec l'hypothèse de deux phases seulement, l'une supra-conductrice et l'autre non supra-conductrice. Mais pour pouvoir trancher cette question dans l'avenir il est nécessaire de développer la théorie aussi loin que possible avec l'hypothèse de l'existence de deux phases seulement.

Il est utile de considérer les conséquences qu'entraîne notre théorie électrodynamique, lorsque nous l'appliquons aux transformations de phase dans un champ magnétique, que nous avons déjà traitées au § 1, à l'aide de l'hypothèse grossière $\mathbf{B} = 0$.

Le résultat, disons-le d'avance, est que ce sont les *densités de courant électrique*, et non les intensités du champ magnétique, à la surface de séparation des phases, qui importent pour la délimitation de l'état supra-conducteur. C'est ce que l'on peut prévoir d'après les considérations du paragraphe précédent, car les forces qui effectuent du travail, sont données par la divergence du tenseur des pressions. Mais celle-ci n'est différente de zéro qu'à la surface de la phase supra-conductrice et effectivement égale à la divergence superficielle provoquée en cet endroit par la discontinuité de $\mathbf{J}$, car nous supposons que $\mathbf{H}$ est continu.

Considérons une couche superficielle entre les deux phases et imposons-lui une petite variation virtuelle. Son déplacement δ est supposé très petit par rapport à $c/\sqrt{\Lambda}$. Traçons de part et d'autre de cette surface, et de toutes ses positions au cours du déplacement, deux surfaces fermées auxiliaires : σ_1 qui est et

demeure tout entière dans le domaine supra-conducteur, σ_2 dans le domaine non supra-conducteur. La distance Δ entre σ_1 et σ_2 est supposée très petite aussi en comparaison de $c\sqrt{\Lambda}$.

Pour déterminer la position d'équilibre de la couche limite, nous allons écrire que l'énergie libre F est *minimum* par rapport à un déplacement virtuel de ce genre, et de même, dans le cas où un travail A serait cédé au système et où peut-être aussi une chaleur irréversible Q y serait développée, que

$$F - A \text{ ou } F - A - Q \text{ sont minimum.}$$

L'énergie libre comprend un terme « chimique » F_1 qui est donné par la différence des énergies libres des deux phases. Nous l'avons mis en relation avec la chaleur spécifique (§ 1), et nous l'avons supposé proportionnel au volume de la phase supra-conductrice. Désignons par f_1 cette énergie libre par unité de volume. (Dans le paragraphe 1, nous l'avons désignée par $f_s - f_n$ et déterminé sa valeur égale à $-\frac{1}{2}H_T^2$). La variation de F_1 qui provient du déplacement considéré de la courbe limite s'écrit

$$\delta F_1 = f_1 \cdot \delta V = -\frac{1}{2}H_T^2 \delta V \quad (39)$$

(δV = accroissement de volume de la phase supra-conductrice au cours de la variation).

L'énergie libre comprend en outre un terme électromagnétique F_2 , que dans la phase supra-conductrice nous identifierons avec la quantité d'énergie définie au paragraphe précédent :

$$F_2 = \int_{\text{supr.}} \frac{1}{2} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2 + \Lambda \mathbf{J}^2) dV + \int_{\text{non supr.}} \frac{1}{2} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2) dV$$

Considérons maintenant sa variation dans le domaine constamment non supra-conducteur, à l'extérieur de la surface σ_2 . Elle y est exactement égale au travail cédé A (donné par le flux d'énergie $c[\mathbf{E} \mathbf{H}]$), plus éventuellement une quantité de chaleur irréversible Q qui y peut être créée. C'est ce qui résulte de l'équation exprimant la conservation de l'énergie. Pour obtenir celle-ci il est absolument indifférent que la variation des champs se produise par variation d'un paramètre arbitraire extérieur, ou d'elle-même. Il en est de même, dans le domaine supra-conducteur, à l'intérieur de σ_1 . Nous pouvons dans ce qui suit faire abstraction de ces domaines, car on y a toujours $\delta(F - A - Q) = 0$.

Considérons finalement *le domaine compris entre σ_1 et σ_2* . Le flux d'énergie à travers les deux surfaces σ_1 et σ_2 est égal à $c[\mathbf{EH}]$. Puisque nous avons posé la continuité de E_{tg} et H_{tg} , le flux d'énergie total qui entre dans le domaine compris entre σ_1 et σ_2 est proportionnel à Δ . Sa variation lors d'un déplacement de la courbe limite est proportionnelle à $\Delta \cdot \delta$ et s'annule avec Δ .

La variation de l'énergie $\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \frac{1}{2} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2) dV$ est également aussi petite qu'on le veut, parce que $\mathbf{E}$ et $\mathbf{H}$ traversent de façon continue la couche limite.

Par contre, seule l'énergie $\int_{\sigma_1}^{\sigma} \frac{1}{2} \Lambda \mathbf{J}^2 dV$ varie — indépendamment de la position envisagée de la surface σ_1 — proportionnellement au changement de volume de la phase supra-conductrice ; en effet elle n'est définie que pour cette seule phase. On trouve aisément :

$$\delta F_2 = \frac{\Lambda}{2} J_{\sigma}^2 \cdot \delta V \quad (40)$$

où J_{σ} représente la valeur de $\mathbf{J}$ sur la surface σ .

C'est cette quantité d'énergie (40) qui devient disponible lors du déplacement envisagé δV .

D'après l'interprétation habituelle de la supra-conductibilité comme conductibilité infinie, on aurait dû s'imaginer que lors d'un déplacement de la surface limite ceux des supra-courants qui, par le déplacement de la couche limite, parvenaient dans la phase normale, devaient être freinés et leur énergie (40) irréversiblement transformée en chaleur. En ramenant la couche limite à sa position initiale, on devait supposer que les courants restent à l'intérieur et que le champ magnétique s'y congèle.

Dans notre théorie, au contraire, nous supposons des conditions *réversibles*. Les supra-courants qui parviennent dans la phase normale par le déplacement de la couche limite ne seront pas freinés par transformation de leur énergie en chaleur. Cette énergie sera transformée en énergie libre de la phase normale. En ramenant la couche, nous obtenons de nouveau conformément

à (I) dans le champ magnétique situé derrière la couche les courants initiaux, dont l'énergie cinétique est fournie réversiblement par l'énergie de transformation libérée. Nous écrirons que l'énergie cinétique δF_2 s'ajoute à l'énergie de transformation d'une phase dans l'autre δF_1 pour donner la *variation totale de l'énergie libre* :

$$\delta F = \delta F_1 + \delta F_2 = \left\{ -\frac{\Lambda}{2} J_{\sigma}^2 + f_1 \right\} \delta V \quad (41)$$

On obtient ainsi la condition d'équilibre :

$$\frac{\Lambda}{2} J_{\sigma}^2 = -f_1 \quad (42)$$

On voit qu'il faut corriger quelque peu nos idées préliminaires du paragraphe 1 : ce n'est pas le champ magnétique mais la *densité de courant* induit près de la surface, qui détermine la limitation de la phase supra-conductrice.

Considérons par exemple un cylindre supra-conducteur de rayon a placé dans un champ magnétique longitudinal d'intensité H . Le supra-courant $J = J_{\varphi}$ induit par le champ dans ce cylindre est représenté par les fonctions de Bessel J_1 et J_0 d'argument complexe

$$J = J_{\varphi} = \frac{i}{\sqrt{\Lambda}} H \frac{J_1(i\beta r)}{J_0(i\beta a)} \quad \beta^2 = \frac{1}{\Lambda c^2}$$

on a donc la condition d'équilibre (42) :

$$H = i \sqrt{-2 f_1} \frac{J_0(i\beta a)}{J_1(i\beta a)}$$

Tant que $\beta a \gg 1$ nous pouvons remplacer les fonctions de Bessel par des fonctions exponentielles. On obtient :

$$H \approx \sqrt{-2 f_1} = H_T \quad \text{pour } \beta a \gg 1.$$

Dans le cas des supra-conducteurs *épais* nous pouvons donc caractériser la condition d'équilibre aussi par l'intensité du champ magnétique.

Il doit en être ainsi pour que nous puissions rester d'accord avec nos considérations précédentes (§ 1) : $H_T = \sqrt{-2 f_1}$ est le champ magnétique critique pour des supra-conducteurs *épais*.

Pour $\beta a \ll 1$ nous pouvons poser

$$J_0(i\beta a) \approx 1 \text{ et } J_1(i\beta a) \approx -\frac{i\beta a}{2} .$$

On obtient

$$H \approx \sqrt{-2f_1} \cdot \frac{2}{\beta a} = H_T \cdot \frac{2}{\beta a}$$

Dans le cas des supra-conducteurs *minces*, le champ magnétique peut donc être beaucoup plus intense que la valeur critique H_T sans que la supra-conductibilité disparaisse. C'est peut-être une telle structure fine qui expliquerait les champs magnétiques critiques extrêmement élevés de quelques alliages qui ne satisfont pas non plus aux relations thermodynamiques du paragraphe 1 entre la chaleur spécifique et la courbe des valeurs critiques du champ magnétique. D'autre part un supra-conducteur en métal pur, disposé dans un champ magnétique intense $H > H_T$ devrait préférer se décomposer en cylindres minces supra-conducteurs de rayon $a = \frac{2}{\beta} \frac{H_T}{H}$ au lieu de devenir non supra-conducteur en totalité.

Il semble qu'on ne puisse pas échapper à cette conséquence sans faire de nouvelles hypothèses, par exemple, qu'il existe une *limite inférieure* pour les dimensions spatiales d'un supra-conducteur ⁽¹⁸⁾ ⁽¹⁹⁾. Pour les supra-conducteurs « idéaux », qui donnent un effet Meissner complet, cette limite serait *supérieure* à $c\sqrt{\Lambda}$, mais par contre *inférieure* à $c\sqrt{\Lambda}$ pour les alliages mentionnés. Cette hypothèse serait pratiquement équivalente à la conception d'une sorte d'énergie superficielle de la phase supra-conductrice qu'il faudrait ajouter à (1').

L'hypothèse d'une telle *énergie superficielle* aurait encore de la valeur pour d'autres raisons. Elle permettrait d'expliquer ce que l'on appelle l'*hystérèse*, c'est-à-dire le fait que, lorsqu'on diminue le champ, la résistance ne disparaît pas pour la même intensité du champ qu'elle n'apparaît à nouveau quand on l'établit ; le premier phénomène est tout à fait capricieux dans des champs plus faibles : la formation du premier germe supra-conducteur demande une plus grande densité d'énergie que sa croissance ultérieure. L'hystérèse serait alors l'analogue de la surfusion des liquides ou de la sursaturation des vapeurs, un effet de l'énergie superficielle.

§ 8. L'énergie superficielle de la phase supra-conductrice

Il n'est pas difficile de déterminer plus exactement la valeur de cette énergie superficielle. On n'a qu'à appliquer la méthode du § 1 et évaluer pour un supra-conducteur cylindrique le travail $A_1 + A_2 + A_3 + A_4$ cédé pendant le cycle thermodynamique représenté sur la figure 3, mais en tenant compte maintenant de la pénétration du champ magnétique. Si nous supposons de nouveau la réversibilité, ce travail nous donnera la différence des énergies libres des deux phases, mais maintenant apparaît un terme nouveau qui peut être interprété comme une sorte d'énergie superficielle.

Le travail A_1 cédé au système dans l'état normal est naturellement le même qu'auparavant :

$$A_1 = \frac{1}{2} H_r^2 V$$

(V = volume d'une tranche du cylindre de hauteur 1 cm).

Pendant l'étape 2, par contre, le flux magnétique ne tombe plus à zéro mais à une valeur qui est petite, il est vrai, mais finie à cause de la pénétration du champ derrière la surface du cylindre. Soit $B_r V$ ce flux magnétique, B_r est donc la valeur moyenne de l'induction magnétique à la fin de l'étape 2. B_r dépend de la valeur critique H_r (c'est-à-dire, de la température T), et naturellement de la forme du cylindre, particulièrement de l'aire de sa surface latérale, car ce n'est que la région d'épaisseur $c/\sqrt{\Lambda}$ derrière la surface qui fournit une contribution au flux.

Si nous tenons compte de cela le calcul du § 1 nous donne pour A_2 :

$$A_2 = H_r V \int_{H_r}^{B_r} dB = H_r (B_r - H_r) \cdot V.$$

Le travail A_3 n'est plus nul, car l'induction magnétique moyenne décroît pendant cette étape de B_r à 0 proportionnellement au champ extérieur H qui de son côté décroît de H_r à 0 ; c'est-à-dire $dB = \frac{B_r}{H_r} dH$; on obtient donc :

$$A_3 = V \int_{B_r}^0 H dB = V \cdot \int_{H_r}^0 H \cdot \frac{B_r}{H_r} dH = -\frac{1}{2} H_r B_r V.$$

Finalement A_4 est nul.

Le travail total s'écrit [cf. (1)] :

$$A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = \left(-\frac{1}{2} H_r^2 + \frac{1}{2} H_r B_r \right) V.$$

La contribution nouvelle $\frac{1}{2} H_r B_r V$ est de l'ordre de grandeur $\frac{1}{2} H_r^2 \cdot S \cdot c/\bar{\Lambda}$ où S est l'aire de la surface latérale d'une tranche de cylindre de hauteur 1 cm. Cette contribution se comporte donc comme une énergie superficielle et pour des supra-conducteurs macroscopiques elle est naturellement très petite en comparaison de l'énergie de volume $\frac{1}{2} H_r^2 V$.

Si nous supposons la réversibilité nous obtenons la différence des énergies libres des deux phases :

$$F_s - F_n = \left(-\frac{1}{2} H_r^2 + \frac{1}{2} H_r B_r \right) V, \quad (43)$$

Si l'énergie superficielle était plus petite en réalité qu'il n'est indiqué par (43) le supra-conducteur cylindrique refroidi dans un champ magnétique extérieur préférerait se décomposer en beaucoup de régions supra-conductrices et retenir, dans les surfaces de séparation entre ces régions, le champ magnétique au lieu de le refouler. Il ne montrerait pas d'effet Meissner.

Mais il est peu probable qu'en réalité l'énergie superficielle soit justement égale à la valeur (43) calculée en supposant la réversibilité. Elle dépassera très probablement un peu cette valeur. Cela serait compatible avec l'expérience discutée au § 1 et de plus pourrait peut-être donner, comme nous l'avons dit, l'explication des phénomènes d'hystérèse.

§ 9. L'état intermédiaire ⁽²³⁾ ⁽²⁴⁾. La transformation de phase dans une sphère et dans un fil parcouru par un courant

Jusqu'à présent nous ne nous sommes occupés que des problèmes qui se rapportaient à la phase supra-conductrice pure ($B = 0$, $E = 0$), ou à des *équilibres* entre cette phase supra-conductrice pure et la phase normale. De plus, nous nous sommes limités à la considération des problèmes d'équilibre dans des corps *cylindriques*. Il y avait une bonne raison à cela : Un corps cylindrique a un facteur de démagnétisation nul. Si l'on aimante par exemple un cylindre dans un champ homogène longitudinal, l'aimantation du cylindre n'effectue aucune réaction au champ agissant. Celui-ci atteint donc la valeur critique en même temps sur toute la surface. Mais considérons maintenant par exemple une *sphère*. Nous remarquerons aussitôt une difficulté particulière :

La sphère, en l'état supra-conducteur, portée dans un champ magnétique uniforme, resserre près de l'équateur les lignes de force magnétiques (comp. fig. 1, cas 1). L'intensité du champ à l'équateur devient une fois et demie plus grande que celle à l'infini. Avec un champ à l'infini $H_0 = \frac{2}{3} H_\tau$ le champ à l'équateur atteint juste la valeur critique, tandis qu'il est plus petit partout ailleurs. Si nous renforçons maintenant le champ encore un peu, la supra-conductibilité devrait être détruite dans la sphère immédiatement derrière l'équateur. Mais il en résulterait qu'en cette région le champ magnétique pourrait entrer dans la sphère. Comme d'autre part les lignes de force seraient alors moins resserrées, le champ magnétique à l'équateur devrait

être plus petit que H_c : l'état supra-conducteur devrait y reparaître. On s'est servi parfois, à propos de cela, de la conception d'un état intermédiaire particulier ou plutôt d'une sorte de *phase mixte* de la phase normale et de la phase supra-conductrice pure, un mélange où les deux phases alternent, ou se pénètrent en forme de couches ou d'aiguilles microscopiques.

Au premier abord il semble extraordinairement compliqué de rendre une telle structure accessible à une étude théorique. Il s'agirait de résoudre un problème aux limites avec des surfaces limites dont la forme devrait être d'abord déterminée, tandis que leur nombre n'est même point donné. On peut cependant éviter ce problème à peine soluble si l'on renonce à une détermination détaillée de cette structure microscopique et se borne à calculer les moyennes des champs prises sur la structure microscopique, qui sont en première ligne l'objet des expériences. Cette idée nous conduit à une théorie « grossièrement » macroscopique qui ne contient que les moyennes macroscopiques des champs et des phases mixtes macroscopiquement homogènes, une théorie qui est une généralisation naturelle et très simple de l'électrodynamique développée particulièrement pour la phase supra-conductrice « pure ». En réalité cependant il ne s'agira pas tant d'une généralisation de la théorie à propos d'un troisième état intermédiaire que d'une application conséquente de la théorie actuelle à une structure mixte compliquée qui se trouve automatiquement réalisée selon cette théorie.

Le rapport entre la théorie de l'état intermédiaire et celle de l'état supra-conducteur pur est comparable, à bien des égards, à celui de la théorie de Maxwell à l'électrodynamique de Lorentz. On peut s'attendre à ce que les détails de la structure des couches — de même que ceux des modèles atomiques dans la théorie de Lorentz — s'éliminent complètement lorsqu'on fait la moyenne, et qu'ils soient par conséquent indifférents pour le résultat final. Mais il existe néanmoins une différence fondamentale avec la théorie de Maxwell et Lorentz : ici les dimensions des régions élémentaires microscopiques ne sont pas constantes : elles dépendent de la valeur moyenne du champ magnétique local et elles s'accroissent infiniment lorsque ce champ diminue jusqu'à zéro. Au cas limite de champs infiniment faibles on est donc forcé d'appliquer la théorie microscopique au supra-conducteur tout

entier. Les moyennes perdraient toute signification. La théorie de l'état supra-conducteur pur (c'est-à-dire le cas des champs infiniment faibles) n'est donc pas déjà contenue dans la théorie de l'état intermédiaire comme un cas spécial ou un cas limite ; ce sont seulement les deux théories ensemble, qui donnent une description macroscopique complète.

1. Nous nous limitons d'abord à la *partie magnétostatique* de la théorie qui forme déjà un tout en soi (*).

Ces équations fondamentales, que leur application au supra-conducteur en état de supra-conductibilité pure nous a fait appeler quelque fois « macroscopiques » (par opposition à la théorie moléculaire), nous allons les considérer maintenant, par rapport à la formation des moyennes projetées, comme « microscopiques » en les supposant valables à l'intérieur de chacune des couches. En conséquence nous désignerons dans la suite les champs et les densités de courant microscopiques par des petites lettres (**e**, **h**, **j**) comme dans la théorie électronique de Lorentz (**).

Voici donc les équations de la magnétostatique de la phase supra-conductrice pure :

$$\begin{aligned} \mathbf{c} \cdot \text{rot } \mathbf{j} &= -\mathbf{h} \\ \mathbf{c} \cdot \text{rot } \mathbf{h} &= \mathbf{j} \end{aligned} \tag{44}$$

Nous supposerons qu'un élément de volume d'un supra-conducteur aimanté consiste en beaucoup de petites régions supra-conductrices cylindriques orientées dans la direction du champ local séparées par des intervalles de phase normale. Nous admettrons d'abord la réversibilité complète, à savoir le signe = dans équation (43), et nous discuterons le cas du signe > un peu plus tard (voir page 61). Aux surfaces de séparation et dans les intervalles normaux le champ microscopique doit avoir la valeur

(*) Cette partie magnétostatique a été développée aussi par R. Peierls ⁽²⁴⁾ indépendamment de nos conceptions comme une théorie purement phénoménologique.

(**) Il aurait été peut-être plus rationnel d'introduire de prime abord dès le § 2 au lieu de $\mathbf{H} = \mathbf{B}$ et $\mathbf{E} = \mathbf{D}$ les symboles de Lorentz **h** et **e** et de réserver les lettres **B** et **E** pour les moyennes $\bar{\mathbf{h}}$ et $\bar{\mathbf{e}}$ que nous allons introduire maintenant. Mais comme ce § 8 ne fut inséré que dans la deuxième épreuve, les notations ne pouvaient pas en être changées dans tout le fascicule.

$|\mathbf{h}| = H_T$. A l'intérieur des régions supra-conductrices pures, $\mathbf{h}$ décroît à cause de (44) continûment de la valeur H_T à la surface à une valeur plus ou moins faible à l'intérieur selon les dimensions de la région en question. Soit a une telle région.

Alors

$$B_T^a = \frac{\int_a h dV}{\int_a dV}$$

désigne l'induction magnétique moyenne dans cette région. (Elle dépend naturellement de la température T parce que le champ à la surface H_T dépend de T .) Soit x_a le rapport du volume de la région a à l'unité de volume. Alors $x = \sum_a x_a$ est la fraction du volume de toute la phase supra-conductrice pure et $1 - x$ la fraction du volume de la phase normale.

Le champ moyen $\overline{\mathbf{h}}$ dans un élément de volume macroscopique, c'est-à-dire l'induction magnétique moyenne, désigné maintenant par $\mathbf{B}$, [voir note (**), p. 52], consiste en des contributions B_T^a des régions de la phase supra-conductrice et en des contributions H_T de la phase normale. L'on obtient :

$$B = \sum_a x_a B_T^a + (1 - x) H_T. \quad (45)$$

Calculons maintenant la *densité d'énergie* d'un supra-conducteur qui contient une certaine induction magnétique B . L'énergie se compose des parties suivantes :

1° L'énergie des régions normales. Si nous la normalisons à zéro pour l'état sans champ elle provient exclusivement de l'énergie magnétique $\frac{1}{2} h^2 = \frac{1}{2} H_T^2$:

$$\frac{1}{2} H_T^2 (1 - x).$$

2° L'énergie des régions supra-conductrices. Celle-ci se compose de :

a) L'énergie libre dans l'état sans champ (43). (F_n est ici normalisé à zéro)

$$\sum_a \left(-\frac{1}{2} H_T^2 + \frac{1}{2} H_T B_T^a \right) x_a$$

et de

b) L'énergie électromagnétique cédée au système, si les cylindres sont aimantés à leur induction magnétique maximum. Cette énergie a déjà été calculée au § 8 ; elle est égale à la valeur négative du travail A_s . Nous obtenons donc pour elle

$$\sum_a \frac{1}{2} H_T B_T^a x_a.$$

En tout nous obtenons donc pour l'énergie libre par l'unité de volume

$$f_s = \frac{1}{2} H_T^2 (1 - x) + \sum_a \left(-\frac{1}{2} H_T^2 + \frac{1}{2} H_T B_T^a \right) x_a,$$

où nous pouvons, en utilisant (45), remplacer la somme $\sum_a x_a B_T^a$ par $B + (x - 1) H_T$, ce qui fait que les x_a et B_T^a , c'est-à-dire tous les détails de la structure des aiguilles ou des couches, s'éliminent complètement. Nous obtenons donc la densité de l'énergie libre en fonction de B et de T seulement :

$$f_s(B) = -\frac{1}{2} H_T^2 + H_T B.$$

Comme $\mathbf{B}$ est un vecteur, l'énergie libre d'autre part est un scalaire, on doit plus précisément écrire pour *l'énergie libre du supra-conducteur dans l'état intermédiaire* (par unité de volume) :

$$f_s(\mathbf{B}) = -\frac{1}{2} H_T^2 + H_T |\mathbf{B}| \quad (46)$$

valable pour $|\mathbf{B}| \leq H_T$.

La signification de la limitation à $|\mathbf{B}| \leq H_T$ est évidente : la phase mixte ne peut pas avoir une induction magnétique plus grande que l'une de ses composantes. Avec $|\mathbf{B}| = H_T$ l'énergie libre (45) de la phase mixte atteint la valeur de l'énergie f_n de la phase normale :

$$f_n(\mathbf{B}) = \frac{1}{2} \mathbf{B}^2, \quad (46a)$$

pour laquelle nous avons supposé une valeur 1 de la perméabilité magnétique. f_s et f_n ont à leur point d'intersection la même tangente.

L'énergie de la phase intermédiaire est une fonction linéaire de l'aimantation ; mais pour $\mathbf{B} = 0$, cette fonction a une tangente

discontinue (v. fig. 8). Elle ne s'y comporte pas analytiquement.

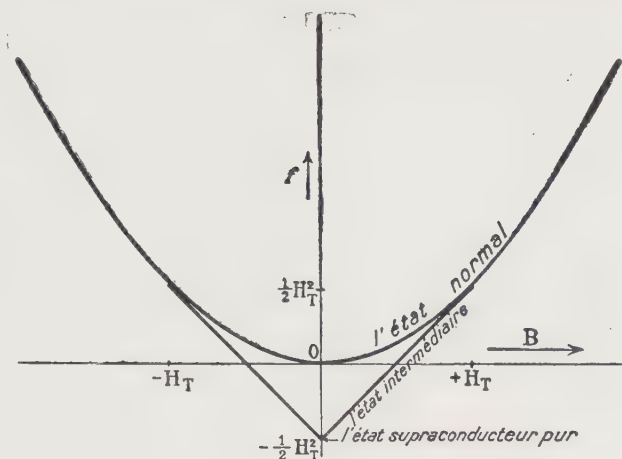


FIG. 8. — L'énergie libre en fonction de l'induction magnétique B .

Dans la théorie de Maxwell la force $\mathbf{H}$ du champ magnétique est définie par le travail dA qui est exigé pour changer l'induction magnétique de $\mathbf{B}$ à $\mathbf{B} + d\mathbf{B}$ c'est-à-dire par

$$dA = (\mathbf{H} d\mathbf{B})$$

Particulièrement dans le cas réversible, $(\mathbf{H} d\mathbf{B})$ doit être considéré comme le changement isotherme de l'énergie libre f , c'est-à-dire :

$$H_x = \frac{\partial f}{\partial B_x} \text{ etc.}$$

et de (46) nous obtenons :

$$\mathbf{H} = H_T \frac{\mathbf{B}}{|\mathbf{B}|} \quad \text{pour } 0 < |\mathbf{B}| \leq H_T. \quad (47)$$

Le champ magnétique a d'après cela la même direction que $\mathbf{B}$; mais il a, indépendamment de la valeur de l'induction, toujours la valeur absolue H_T . Au contraire d'un corps diamagnétique ou paramagnétique, un supra-conducteur ne peut pas toujours s'adapter à un champ magnétique extérieur par une induction convenable. Par conséquent nous n'avons très souvent que les deux cas extrêmes : ou le minimum $\mathbf{B} = 0$ (si le champ actif $|\mathbf{H}| < H_T$) ou la destruction totale de la supra-conductibilité $\mathbf{B} = \mathbf{H}$ (si $|\mathbf{H}| > H_T$). Si cependant par sa forme propre le supra-conducteur

peut réagir sur le champ extérieur comme dans le cas de la sphère, le champ extérieur pourra s'ajuster au champ H_τ dans le supra-conducteur et nous aurons équilibre pour un état intermédiaire avec une induction adaptée $0 < |\mathbf{B}| < H_\tau$.

Selon (47), pour $\mathbf{B} = 0$, le champ $\mathbf{H}$ devient indéfini quant à sa direction et à sa grandeur et perd toute signification. Pour $\mathbf{B} = 0$ les régions supra-conductrices deviennent infiniment grandes ce qui signifie que la description avec un $\mathbf{H}$ macroscopique n'est plus légitime et qu'il faut maintenant appliquer explicitement les équations « microscopiques » à savoir les équations de l'état supra-conducteur « pur ».

De $\text{div } \mathbf{h} = 0$ il suit, si nous faisons la moyenne, que

$$\text{div } \mathbf{B} = 0. \quad (48)$$

De plus, on montre exactement à la manière de Lorentz que

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J} (= 0), \quad (49)$$

où $\mathbf{J}$ signifie la valeur moyenne de $\mathbf{j}$. Pour le cas magnétostatique pur nous poserons $\mathbf{J} = 0$. Donc $\text{rot } \mathbf{H} = 0$.

Finalement, comme toujours, nous supposerons les conditions aux limites : H_{tang} et B_n continus.

La différence avec la théorie du diamagnétisme ordinaire ne consiste donc que dans une modification de la corrélation entre $\mathbf{B}$ et $\mathbf{H}$, ou dans l'application de l'expression (46) pour l'énergie au lieu de (46a). On peut aussi dire que dans notre théorie la perméabilité diamagnétique μ n'est pas une constante mais qu'elle dépend du champ. D'après (47) elle a la valeur :

$$\mu = \frac{|\mathbf{B}|}{H_\tau}. \quad (47')$$

Cependant la différence est assez profonde ; car notre théorie, au contraire de celle de Maxwell, *n'est pas une théorie linéaire*. Le principe de superposition des solutions n'est pas valable et par conséquent les difficultés mathématiques sont considérables, même pour les problèmes les plus simples. L'élément non-linéaire de la théorie est l'équation (47).

Souvent on utilisera avec profit le théorème (24) que les lignes de force du champ magnétique dans l'état intermédiaire sont des lignes droites. Il résulte de (47) :

$$\mathbf{H}^2 = H_\tau^2 \quad \text{d'où : } \text{grad } (\mathbf{H}^2) = 0. \quad (50)$$

Par suite de l'identité vectorielle :

$$\frac{1}{2} \text{grad } (\mathbf{H}^2) = (\mathbf{H}, \text{grad}) \mathbf{H} + [\mathbf{H}, \text{rot } \mathbf{H}],$$

de (50) et de $\text{rot } \mathbf{H} = 0$ nous obtenons :

$$(\mathbf{H}, \text{grad}) \mathbf{H} = 0. \quad (51)$$

La grandeur $(\mathbf{H}, \text{grad}) H_x$ représente simplement le changement de la grandeur H_x le long d'un déplacement $\mathbf{H}$ (théorème de Taylor). (51) dit que si nous suivons $\mathbf{H}$ dans la direction de ses lignes de force ses composantes ne changent pas leurs valeurs.

2. La discussion des questions d'unicité est très compliquée dans cette théorie non-linéaire. Car nous n'avons pas à notre disposition le théorème de la superposition des solutions, qui est, on le sait, un instrument très utile pour épuiser de telles questions. Nous ne nous engagerons pas dans ces détails ; illustrons plutôt la théorie par un exemple et calculons la *transformation d'une sphère supra-conductrice* (rayon $= R$) dans un champ magnétique homogène qui est en infini égal à H_0 .

La symétrie du problème permet comme on sait une solution de (48) (49) avec un champ uniforme à l'intérieur de la sphère. Si nous anticipons cela nous pouvons de prime abord poser pour le champ extérieur ($H^a = B^a$), le champ intérieur H^i et l'induction B^i :

$$\begin{aligned} H_r^a &= \left(H_0 + \frac{2M}{r^3} \right) \cos \vartheta & \left| \begin{array}{l} B_r^i = B_z \cdot \cos \vartheta \\ B_\theta^i = -B_z \cdot \sin \vartheta \end{array} \right| & \left| \begin{array}{l} H_r^i = H_\tau \frac{B_z}{|B_z|} \cos \vartheta \\ H_\theta^i = -H_\tau \frac{B_z}{|B_z|} \sin \vartheta \end{array} \right| \\ H_\theta^a &= \left(-H_0 + \frac{M}{r^3} \right) \sin \vartheta \end{aligned}$$

où M = moment induit.

Les conditions aux limites « B_r et H_θ continus » pour $r = R$ nous donnent les deux équations :

$$\begin{aligned} H_0 + \frac{2M}{R^3} &= B_z \\ -H_0 + \frac{M}{R^3} &= -H_\tau \frac{B_z}{|B_z|}. \end{aligned}$$

Par l'élimination de M nous obtenons pour B_z

$$B_z = 3H_0 - 2H_\tau \frac{B_z}{|B_z|} = \begin{cases} 3H_0 - 2H_\tau & \text{pour } H_\tau > B_z > 0 \\ \text{c'est-à-dire pour } H_\tau > H_0 > \frac{2}{3}H_\tau \\ 3H_0 + 2H_\tau & \text{pour } -H_\tau < B_z < 0 \\ \text{c'est-à-dire pour } -H_\tau < H_0 < -\frac{2}{3}H_\tau \end{cases}$$

et pour le moment $\mathbf{M}$:

$$\mathbf{M} = \frac{1}{2} R^3 (\mathbf{B}_r - \mathbf{H}_0) = \begin{cases} R^3 (\mathbf{H}_0 - \mathbf{H}_r) & \text{pour } \mathbf{H}_r > \mathbf{H}_0 > \frac{2}{3} \mathbf{H}_r \\ R^3 (\mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_r) & \text{pour } -\mathbf{H}_r < \mathbf{H}_0 < -\frac{2}{3} \mathbf{H}_r \end{cases}$$

Les équations n'ont donc une solution (*) que pour

$$\frac{2}{3} \mathbf{H}_r \leq |\mathbf{H}_0| \leq \mathbf{H}_r.$$

A la limite inférieure de cet intervalle, $\mathbf{B}$ s'annule et cela nous indique que la structure microscopique prend des dimensions macroscopiques et que notre théorie des moyennes macroscopiques n'est plus valable. Pour $|\mathbf{H}_0| < \frac{2}{3} \mathbf{H}_r$ nous devons donc remonter aux équations de l'état supra-conducteur pur avec $\mathbf{h}$ et $\mathbf{j}$ et les appliquer à la sphère tout entière (au lieu des équations (47) (48) (49) avec les moyennes $\mathbf{B}$ et $\mathbf{H}$). Par suite de (44) nous avons à l'intérieur

$$\text{rot rot } \mathbf{h} + \beta^2 \mathbf{h} = 0 \quad \text{pour } r < R \quad \beta = \frac{1}{c \sqrt{\Lambda}}.$$

Nous essayons de nouveau de construire le champ extérieur où nous identifions $\mathbf{h}$ avec $\mathbf{H}$ comme un champ uniforme auquel se superpose le champ d'un dipôle :

$$\begin{aligned} h_r &= \left(\mathbf{H}_0 + \frac{2\mathbf{M}}{r^3} \right) \cos \vartheta \\ h &= \left(-\mathbf{H}_0 + \frac{\mathbf{M}}{r^3} \right) \sin \vartheta \end{aligned} \quad \text{pour } r \geq R.$$

La seule solution régulière avec la symétrie d'un dipôle à l'intérieur est

$$\begin{aligned} h_r &= \frac{2\mathbf{A}}{\beta^2 r^2} \left(\cos \beta r - \frac{\sin \beta r}{\beta r} \right) \cos \vartheta \\ h_\theta &= \frac{\mathbf{A}}{\beta^2 r^2} \left(\cos \beta r - \left[\frac{1}{\beta r} + \beta r \right] \sin \beta r \right) \sin \vartheta \end{aligned} \quad \text{pour } r \leq R.$$

Les conditions aux limites « h_n et h_{tg} continus » nous donnent les constantes $\mathbf{A}$ et $\mathbf{M}$.

(*) On peut facilement montrer que cette solution est la seule possible.

$$A = \frac{3 H_0}{2} \frac{\beta R}{\sin \beta R}$$

$$M = -\frac{H_0 R^3}{2} \left(1 - 3 \frac{\text{Ctg } \beta R}{\beta R} + \frac{3}{\beta^2 R^2} \right) - \frac{H_0 R^3}{2} \text{ pour } |H_0| < \frac{2}{3} H_T$$

Le champ h décroît comme toujours rapidement mais continûment de la surface vers l'intérieur de la sphère. C'est-à-dire que le flux total à travers la sphère pour $|H_0| < \frac{2}{3} H_T$ est pratiquement nul. Désignons même dans ce cas le flux moyen à travers la sphère par B . Nous obtenons alors pour la courbe complète de l'induction magnétique le diagramme ci-contre.

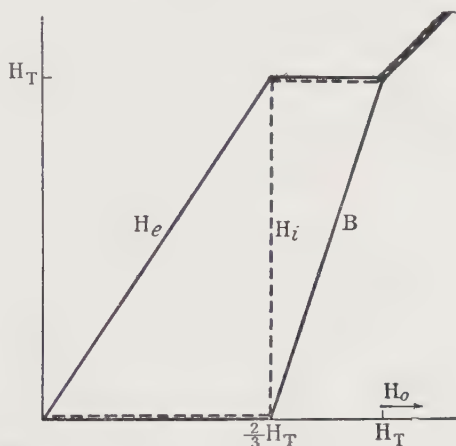


FIG. 9. — Transformation de phase dans une sphère.

Le champ magnétique à l'extérieur de la sphère près de l'équateur (H_e), à l'intérieure (H_i) et l'induction magnétique (B) sont représentées en fonction du champ appliqué (H_0).

Le champ magnétique H_i à l'intérieur de la sphère est nul tant qu'on se trouve dans le domaine de la théorie microscopique, c'est-à-dire pour $|H_0| < \frac{2}{3} H_T$. Pour $|H_0| = \frac{2}{3} H_T$ le champ intérieur saute brusquement de 0 à H_T et conserve cette valeur jusqu'à ce que H_0 ait atteint la valeur H_T : la supra-conductibilité est alors complètement détruite. Pour des valeurs plus grandes de H_0 le champ à l'intérieur est naturellement égal à H_0 .

Pour l'état intermédiaire, autant que pour l'état normal, c'est-à-dire pour $|H_0| > \frac{2}{3} H_T$ le champ magnétique H_i à l'inté-

rieur de la sphère est égal au champ H_e près de l'équateur (H_{tang} est continu). Cela résulte immédiatement du fait, que dans cet état la situation peut être décrite par les $\mathbf{H}$ et $\mathbf{B}$ macroscopiques et les conditions aux limites habituelles et par une perméabilité magnétique μ qui, il est vrai, dépend de $\mathbf{B}$. Par contre pour $|H_0| < \frac{2}{3} H_T$, c'est-à-dire pour l'état supra-conducteur pur, le champ extérieur près de l'équateur est égal à $\frac{3}{2} H_0$, tandis que le champ dans la sphère est nul. Le champ $\mathbf{H}$ ayant dans ce cas un rotationnel, nous montre très clairement qu'un courant macroscopique doit être présent et que les phénomènes ne peuvent plus être décrits par $\mathbf{B}$, $\mathbf{H}$ et μ seuls. Si l'on avait supposé simplement $\mu = 0$ pour $|H_0| < \frac{2}{3} H_T$ (au lieu de la théorie microscopique) on aurait trouvé pour H_i une fonction partout continue de H_0 et naturellement toujours égale au champ H_e près de l'équateur.

Récemment De Haas et Guinau, et plus récemment encore Mendelssohn et Shoenberg, ont publié (²⁵) des expériences sur le comportement magnétique des sphères supra-conductrices. Le champ fut mesuré: 1° à l'extérieur près du pôle (il donne B); 2° à l'intérieur de la sphère dans une cavité allongée parallèle à la direction du champ (il donne H_i) et enfin à l'extérieur près de l'équateur (H_e); tout cela fut mesuré en fonction de H_0 . Shoenberg détermina directement, par l'action d'un champ inhomogène, le moment induit M . Les résultats de notre théorie s'accordent fort bien avec ces mesures. Quelques petits désaccords seront très probablement interprétés comme des effets d'hystérèse. Particulièrement la discontinuité de H_i pour $|H_0| = \frac{2}{3} H_T$ et l'inégalité de H_i et H_e pour $|H_0| < \frac{2}{3} H_T$ se manifeste très clairement dans ces expériences.

Si l'on veut mesurer le champ dans un supra-conducteur à la manière habituelle dans des cavités allongées il faut faire attention à la circonstance perturbatrice suivante : si le supra-conducteur devient doublement connexe par la percée, il en résulte immédiatement des irréversibilités. Un flux magnétique peut rester dans la percée tandis que le supra-conducteur environnant lui-même ne contient pratiquement aucun champ (*Hystérèse par anneaux supra-conducteurs*).

Le cas du signe $>$ dans (43) peut être discuté assez simplement. Tandis que dans le cas du signe $=$ il est, quant à l'énergie, *indifférent* que le supra-conducteur se divise en de nombreuses régions minces et denses ou en quelques-unes relativement plus distantes les unes des autres, dans le cas du signe $>$ l'énergie superficielle est plus grande et par conséquent c'est l'apparition d'un petit nombre de régions plus épaisses qui se trouve favorisée : Dans le cas d'équilibre l'extension des régions sera telle que l'énergie superficielle sera négligeable en comparaison de l'énergie de volume, de sorte que la formule (46) représente de nouveau l'énergie de la distribution la plus stable, si le supra-conducteur a une étendue suffisante. Mais l'établissement de l'équilibre sera empêché par des phénomènes d'hystérèse et par d'autres retards, car dans ce cas la *variation du nombre* des régions supra-conductrices est un *processus irréversible* (Hystérèse par formation de germes).

Une question encore en discussion est celle de la réalité de la microstructure du supra-conducteur que nous avons supposée ici. Il n'est pas impossible que ces images de structure n'aient pas de signification réelle et qu'elles ne soient qu'une construction idéale. D'autre part on sait que dans la théorie du ferromagnétisme on a supposé d'une manière analogue des régions élémentaires (à savoir celle de l'aimantation spontanée) dont la réalité a pu être prouvée directement par l'expérience. Peut-être pourra-t-on, pour le supra-conducteur aussi, trancher expérimentalement cette question.

3. La première tâche sera de généraliser la théorie pour l'appliquer aussi aux *champs électriques*. Il semble assez compliqué de ramener le cas général à la théorie de la phase supra-conductrice pure de la même façon dont nous le faisons pour le cas magnétostatique. Mais un résultat aussi simple que celui qui fut trouvé pour le champ magnétique permet de supposer une généralisation également simple. Jusqu'à présent la théorie de l'état intermédiaire ne se laissait étendre au cas des champs électriques que si les *conditions spéciales* suivantes étaient remplies :

a) La direction du champ électrique $\mathbf{E}$ est partout perpendiculaire à celle de l'induction magnétique $\mathbf{B}$ et parallèle au courant macroscopique $\mathbf{J}$;

b) L'énergie superficielle effective de l'état supra-conducteur

surpasse notablement celle que nous avons dérivée de la thermodynamique pour le cas réversible dans le § 8.

Sous ces deux restrictions un raisonnement très élémentaire conduit déjà au but. Il est possible que le résultat que nous allons déduire soit d'une validité plus générale que celle qu'on peut attendre de notre déduction spéciale.

De *b*) il résulte que les régions partielles de supra-conductibilité pure dans lesquelles le supra-conducteur se divise sont épaisses comparées à la profondeur à laquelle le champ magnétique peut pénétrer dans ces régions. Dans ce cas tous les champs macroscopiques reposent essentiellement sur les inclusions de la phase normale et en première approximation nous pouvons négliger tous les effets de pénétration. C'est-à-dire que nous égalons exactement à zéro le champ magnétique dans les régions de supra-conductibilité pure. Le champ électrique y disparaît de toute façon.

A cause de *a*) nous pouvons supposer que les inclusions de la phase normale sont bordées par des surfaces limites à peu près plan-parallèles, qui s'étendent jusqu'à la frontière du supra-conducteur. Le champ électrique sera orienté perpendiculairement à ses surfaces, le champ magnétique sera parallèle à celles-ci.

Soient **e** et **h** les champs microscopiques dans une telle inclusion normale, soit ξ le volume de ces inclusions par unité de volume du supra-conducteur. Alors les grandeurs macroscopiques $\mathbf{E} = \bar{\mathbf{e}}$ et $\mathbf{B} = \bar{\mathbf{h}}$ sont données par

$$\mathbf{E} = \xi \cdot \mathbf{e} \quad \mathbf{B} = \xi \cdot \mathbf{h} \quad (52)$$

A la surface séparant les deux phases la pression des tensions Maxwelliennes $\frac{1}{2}(\mathbf{h}^2 - \mathbf{e}^2)$ doit être en équilibre avec la pression $\frac{1}{2}\Pi_r^2$ qui repose sur le changement de l'énergie libre (1') lors d'un changement de phase. La condition d'équilibre à la surface s'écrit donc :

$$\frac{1}{2}(\mathbf{h}^2 - \mathbf{e}^2) = \frac{1}{2}\Pi_r^2 \quad (53)$$

ou si nous introduisons par (52) les grandeurs macroscopiques **B** et **E** et nous souvenons que $\xi \geq 0$:

$$\xi H_r = |\sqrt{\mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2}| \quad (54)$$

Cette équation nous donne ξ , la concentration de la phase normale, en fonction des grandeurs macroscopiques.

L'énergie libre par unité de volume de la phase mixte se compose des deux parts suivantes :

1° L'énergie électromagnétique f_1 localisée dans les inclusions normales qui remplissent le volume ξ par unité de volume

$$f_1 = \xi \frac{1}{2} (\mathbf{h}^2 + \mathbf{e}^2)$$

2° La contribution « chimique » f_2 à l'énergie libre localisée dans les régions supraconductrices pures, qui remplissent le volume $1 - \xi$ par unité de volume :

$$f_2 = (1 - \xi) \left(-\frac{1}{2} H_r^2 \right)$$

Pour l'énergie libre totale $f = f_1 + f_2$ par unité de volume nous obtenons en tenant compte de (52) et (54)

$$f = H_r \frac{\mathbf{B}^2}{|\sqrt{\mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2}|} - \frac{1}{2} H_r^2 \quad (55)$$

valable pour $0 < \xi \leq 1$ ou pour $0 < \mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2 \leq H_r^2$.

Cette expression est une généralisation de la formule (46) qu'on obtient pour le cas purement magnétostatique ($\mathbf{E} = 0$).

Par une transformation de Legendre

$$f = L - \left(\mathbf{E} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{E}} \right)$$

nous pouvons introduire une fonction de Lagrange L

$$L = H_r \cdot |\sqrt{\mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2}| - \frac{1}{2} H_r^2$$

qui nous donne, par ses dérivées partielles, les grandeurs $\mathbf{D}$ et $\mathbf{H}$ en fonction de $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{D} &= -\frac{\partial L}{\partial \mathbf{E}} = \frac{\mathbf{E}}{|\sqrt{\mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2}|} H_r \\ \mathbf{H} &= \frac{\partial L}{\partial \mathbf{B}} = \frac{\mathbf{B}}{|\sqrt{\mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2}|} H_r \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

Il nous faut une information de plus pour établir la corrélation

entre le courant macroscopique $\mathbf{J}$ et le champ. Dans les régions normales le champ $\mathbf{e}$ sera accompagné par un courant $\mathbf{j}$ selon la loi d'Ohm :

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{e}$$

où σ signifie la conductibilité électrique de la phase normale. Ce courant doit être continué dans les régions supra-conductrices pures sans champ électrique. La composante $\mathbf{J}_{11}$ du courant macroscopique $\mathbf{J}$ parallèle à $\mathbf{E}$ sera donc donnée par :

$$\mathbf{J}_{11} = \sigma \mathbf{e} = \frac{\sigma \mathbf{E}}{|\sqrt{\mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2}|} \quad H_T = \sigma \cdot \mathbf{E}$$

La chaleur de Joule est donc :

$$Q = \frac{\sigma \mathbf{E}^2}{|\sqrt{\mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2}|} H_T = \sigma (\mathbf{D} \cdot \mathbf{E})$$

Finalement nous supposons les équations de Maxwell avec les conditions aux limites habituelles : H_{tg} , B_n , E_{tg} , $D_n + J_n$ continues.

De (56) nous déduisons immédiatement l'identité importante :

$$(\mathbf{H}^2 - \mathbf{D}^2 - H_T^2) (\mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2) = 0 \quad (58)$$

Lorsque le second facteur s'annule on a l'état *supra-conducteur pur*. De (55) résulte que, dans ce cas, $\mathbf{B}$ et $\mathbf{E}$ mêmes doivent disparaître afin que l'énergie ne soit infinie. $\mathbf{H}$ ainsi que $\mathbf{D}$ deviennent indéfinis [v. (56)] et n'ont aucune signification.

Dans l'état *intermédiaire* le premier facteur de (58) s'annule :

$$\mathbf{H}^2 - \mathbf{D}^2 = H_T^2 \quad (59)$$

L'état *normal* est atteint pour $\xi = 1$, c'est-à-dire pour

$$\mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2 = H_T^2$$

Si cette relation est remplie, l'énergie libre (55) atteint la valeur $\frac{1}{2} (\mathbf{B}^2 + \mathbf{E}^2)$ de l'énergie de la phase normale et en même temps nous obtenons $\mathbf{B} = \mathbf{H}$ et $\mathbf{E} = \mathbf{D}$.

Comme le plus souvent $\mathbf{E}$ est extraordinairement petit comparé avec $\mathbf{B}$ on peut pratiquement presque toujours négliger $\mathbf{E}^2$ par rapport à $\mathbf{B}^2$. Alors nous avons simplement pour $0 < |\mathbf{B}| < H_T$:

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{|\mathbf{B}|} H_T \quad (56a)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \frac{\mathbf{E}}{|\mathbf{B}|} H_T \\ \mathbf{J} &= \frac{\sigma \mathbf{E}}{|\mathbf{B}|} H_T \end{aligned} \quad (57a)$$

Bien entendu tout ce raisonnement doit être considéré comme un essai grossier et tout à fait provisoire. En réalité ici aussi les effets d'hystérèse et d'autres effets de retard compliqueront considérablement la situation. En particulier il faut souligner que notre théorie ne donne pas de réponse à la question de savoir si les courants de l'état intermédiaire ne peuvent pas avoir une composante perpendiculaire au champ électrique ce qui pourrait aussi impliquer l'existence des courants sans aucun champ électrique (à savoir des supra-courants le long des couches ou des aiguilles supra-conductrices). Les mesures de la résistance des fils supra-conducteurs dans un champ magnétique transversal ⁽²⁶⁾ semblent confirmer l'existence de pareils supra-courants dans l'état intermédiaire. Mais il n'est pas encore sûr que ce ne soit pas un effet de l'hystérèse qui se manifeste dans ces expériences.

4. Prenons comme exemple de la théorie le *changement* de phase dans un *fil cylindrique infini parcouru par un courant*. Le courant produit un champ magnétique qui détruit la supra-conductibilité. Nous utilisons des coordonnées cylindriques r, z, φ . Soit a le rayon du fil.

Nous supposons donnée l'intensité de courant I et nous cherchons l'intensité E du champ électrique correspondant. Nous devons distinguer deux cas selon que $I < 2 \pi a c H_T$ ou $I > 2 \pi a c H_T$. Le courant

$$I_T = 2 \pi a c H_T$$

est caractérisé comme celui qui produit justement le champ magnétique critique H_T à la surface du fil de rayon a .

a) $I < I_T$. Dans ce cas le champ magnétique est partout $< H_T$. Nous n'avons dans tout le fil qu'une seule phase, la phase supra-conductrice pure (comp. fig. 7). On obtient pour le courant et le champ magnétique pour $r < a$:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{J} = \mathbf{J}_z &= I \frac{i\beta}{2\pi a} \frac{J_0(i\beta r)}{J_1(i\beta a)} \sim I \frac{\beta}{2\pi \sqrt{ar}} e^{\beta(r-a)} \\ \mathbf{H} = \mathbf{H}_\varphi &= I \frac{1}{2\pi ac} \frac{J_1(i\beta r)}{J_1(i\beta a)} \sim I \frac{1}{2\pi c \sqrt{ar}} e^{\beta(r-a)} \end{aligned} \right\} r < a.$$

Le courant coule sans aucun champ électrique : $E = 0$ pour $I < I_r$;

b) $I > I_r$. Dans ce cas le champ magnétique à l'intérieur du fil, près de la surface, doit être plus grand que H_r . Nous avons donc ici nécessairement la conductibilité normale. On pourrait penser que les trois phases — normale, intermédiaire et supra-conductrice — se succèdent spatialement dans le fil de l'extérieur à l'intérieur. Mais si nous cherchons une solution, qui soit indépendante du temps, nous voyons aussitôt que la présence d'une phase supra-conductrice exclurait une situation stationnaire : une part du courant devrait être transportée par une au moins des deux autres phases. Dans celles-ci, cependant, une conduction de courant n'est possible qu'avec un champ électrique coordonné. A cause de $\text{rot } \mathbf{E} = 0$ ce champ devrait paraître aussi dans la phase supra-conductrice pure la plus profonde. Ici cependant à cause de $\Lambda \mathbf{J} = \mathbf{E}$ une situation stationnaire n'est possible qu'en cas d'absence des champs électriques. La densité du courant s'y accroîtrait jusqu'à ce que l'état intermédiaire fût atteint.

Nous avons donc seulement deux phases : la phase intermédiaire, au milieu, et la phase normale, au dehors. Pour des raisons de symétrie, la surface de séparation aura la forme d'un cylindre. Soit R son rayon. Le champ électrique satisfait à l'équation $\text{rot } \mathbf{E} = 0$. Encore pour des raisons de symétrie il en résulte que

$$E = E_z = \text{constante.}$$

Nous pouvons supposer que $E_z > 0$. La symétrie exige en outre, que $H = H_\varphi(r)$ et $J = J_z(r)$.

A cause de (56a) nous avons dans la phase intermédiaire $H = H_\varphi = \pm H_r$. La distribution du courant est donnée alors par $J = c \text{ rot } H$

$$J = J_z = \frac{c}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r H_\varphi) = \pm \frac{c}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r H_r) = \pm \frac{c H_r}{r}.$$

Comme nous avons supposé $E_z > 0$ il découle de (57) que l'on a aussi $J_z > 0$.

Donc

$$J_z = + \frac{c H_r}{r}.$$

A cause de (57a) nous pouvons déterminer $|\mathbf{B}|$:

$$|\mathbf{B}| = \frac{\sigma E}{J} H_r = \frac{\sigma E r}{c}.$$

La région de l'état intermédiaire est limitée par la condition

$$|\mathbf{B}| \leq H_T.$$

D'où le rayon R qui sépare les deux phases :

$$R = \frac{c H_T}{\sigma E}. \quad (61)$$

Pour $r \leq R$ nous avons la distribution du courant donnée ci-dessus. Pour $r \geq R$ la loi d'Ohm est valable c'est-à-dire :

$$J = \sigma E \quad \text{pour } r \geq R.$$

Donc à la surface de séparation des deux phases ($r = R$) la densité du courant J est continue.

La détermination de E , qui, à cause de (61), entraîne celle de R , s'effectue en tenant compte du fait que le courant total doit avoir la valeur I . Le courant total I se compose :

1° Du courant I_1 dans la région de conductibilité normale (entre $r = R$ et $r = a$) :

$$I_1 = \int_R^a \sigma E \cdot 2\pi r dr = \sigma\pi (a^2 - R^2) E$$

2° Du courant I_2 dans l'état intermédiaire (entre $r = 0$ et $r = R$) :

$$I_2 = \int_0^R \frac{c H_T}{r} \cdot 2\pi r dr = 2\pi c R H_T.$$

Nous obtenons au total :

$$I = I_1 + I_2 = \sigma\pi (a^2 - R^2) E + 2\pi c R H_T.$$

Nous y remplaçons R au moyen de (61) :

$$I = \sigma\pi a^2 E + \frac{\pi c^2 H_T^2}{\sigma E}.$$

C'est une équation du second degré pour E . Avec les abréviations

$I_T = 2\pi c a H_T$ et $\omega_0 = \frac{1}{\sigma\pi a^2}$ (résistance par cm longueur du fil dans l'état normal) elle s'écrit :

$$\left(\frac{E}{\omega_0}\right)^2 - I\left(\frac{E}{\omega_0}\right) + \left(\frac{1}{2}I_T\right)^2 = 0.$$

On en obtient la résistance $\omega = \frac{E}{I}$ en fonction de I ou de E :

$$\begin{aligned} \omega = \frac{E}{I} &= \frac{\omega_0}{2} \left[1 + \sqrt{1 - \left(\frac{I_T}{I}\right)^2} \right] \quad \text{pour } I \geq I_T \quad (62) \\ &= \omega_0 \frac{4E^2}{\omega_0^2 I_T^2 + 4E^2} \end{aligned}$$

Pour $I = I_T$ nous obtenons $\omega = \frac{\omega_0}{2}$ tandis que $\frac{\partial \omega}{\partial I} = \infty$. Pour

$I < I_r$ nous avons la solution qui fut calculée plus haut avec $E = 0$, c'est-à-dire $\omega = 0$. La résistance d'après cela saute pour $I = I_r$ brusquement de $\frac{\omega_0}{2}$ à 0.

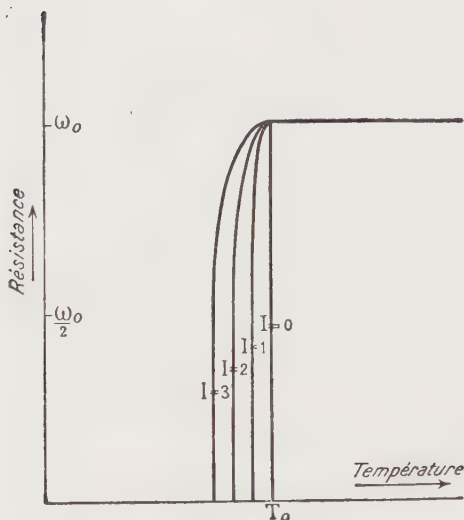


FIG. 10. — Courbe de changement de la résistance pour des valeurs diverses du courant I ($I = 0, 1, 2, 3$ en unités arbitraires).

Regardée comme une fonction de I_r l'équation (62) nous donne la courbe de transition en fonction de la température T . $I_r = 2 \pi ac H_r$ est proportionnel à H_r qui près de la température critique T_0 peut être approximativement représenté comme une fonction linéaire de la température sous la forme :

$$H_r = k (T_0 - T).$$

Donc

$$I_r = 2 \pi ac H_r = k' (T_0 - T).$$

D'où on obtient pour (62):

$$\omega = \begin{cases} \frac{\omega_0}{2} \left[1 + \sqrt{1 - \left(k' \frac{T - T_0}{I} \right)^2} \right] & \text{pour } I \geq I_r \text{ c'est-à-dire} \\ & \text{pour } T_0 > T > T_0 - \frac{I}{k'} \\ 0 & \text{pour } I \leq I_r \text{ c'est-à-dire pour } T < T_0 - \frac{I}{k'} \end{cases} \quad (62')$$

La résistance électrique décroît donc entre T_0 et $T_0 - \frac{I}{k'}$, de ω_0 à 0.

Dans le cas limite de courants infiniment faibles ($I \rightarrow 0$) la courbe de résistance forme à $T = T_0$ un angle droit parfait (fig. 10). La comparaison avec les mesures de De Haas et Voogd⁽²⁷⁾ montre une concordance qualitative. Mais il n'est guère possible de discuter les expériences sans entrer dans plus de détails.

§ 10. Description quantique de la supra-conductibilité

On n'a pas encore tenté de rattacher nos équations fondamentales à la théorie électronique des métaux, mais il est intéressant d'examiner en quoi consiste le problème que posent nos équations à une future théorie moléculaire. Si nous ne pouvons donner encore aucune *explication* de la supra-conductibilité, il faut néanmoins attacher de la valeur au fait que nous en possédons une *description* remarquablement simple dans le langage de la cinématique quantique.

On sait qu'en mécanique quantique la densité du courant électrique est donnée par

$$\mathbf{J} = \frac{he}{4\pi im} (\psi \text{ grad } \psi^* - \psi^* \text{ grad } \psi) - \frac{e^2}{mc} \psi \psi^* \mathbf{A} \quad (63)$$

ψ est la fonction d'onde d'un électron unique, dans le champ self consistant des autres, $\psi\psi^*$ donne la probabilité de présence de cet électron au point considéré. Si l'on fait la somme par rapport à tous les électrons, $\Sigma\psi\psi^*$ donne le nombre n d'électrons par cm^3 . Ainsi le dernier terme de (63) est macroscopiquement égal à

$$- \frac{ne^2}{mc} \mathbf{A} .$$

Si l'on portait dans (63) les fonctions propres non perturbées des électrons libres dans le métal, les termes de la parenthèse s'élimineraient tous par raison de symétrie au cours de la sommation sur tous les états occupés, seul le terme contenant les potentiels ne disparaîtrait pas et (63) se transformerait exactement en notre équation fondamentale $\Lambda c \mathbf{J} = - \mathbf{A}$ (27') avec

$\Lambda = \frac{m}{nc^2}$. Si l'on admet que l'on a $n \leq 10^{23} \text{ cm}^{-3}$ on obtient

$\Lambda \geq 3,2 \cdot 10^{-13} \text{ sec}^2$. Cela entraîne pour l'épaisseur de la couche dans laquelle le champ magnétique peut pénétrer

$$c\sqrt{\Lambda} \geq 1,7 \cdot 10^{-6} \text{ cm.}$$

En réalité les fonctions propres des électrons dans le métal sont notamment perturbées par le champ magnétique et par conséquent les termes de la parenthèse de (63) ne s'éliminent point si on porte dans les équations (63) les fonctions propres perturbées par le champ magnétique. Bien au contraire, ces termes sont en réalité du même ordre de grandeur que ceux contenant le potentiel et les compensent pratiquement. De plus l'énergie des états est perturbée et la manière dont ils sont occupés est modifiée. Il ne reste qu'un très petit diamagnétisme qu'on appelle le diamagnétisme de Landau ⁽²⁰⁾.

Admettons dorénavant que dans l'état le plus profond les électrons soient couplés entre eux de telle façon que l'influence perturbatrice du champ magnétique sur les fonctions propres ne puisse devenir notable que si elle devient d'un ordre de grandeur comparable aux forces de couplage. Tant que le champ magnétique est suffisamment faible, on peut admettre que les fonctions propres ne subissent qu'une perturbation proportionnelle au carré, ou à une puissance supérieure de l'intensité du champ magnétique. On peut, par exemple, l'écrire sous la forme :

$$\psi = \psi_0 + H^2 \psi_1$$

où ψ_0 est la fonction propre en l'absence de champ.

Si l'on porte ces fonctions propres dans les expressions du courant, les parenthèses ne donnent qu'une contribution en H^2 , qu'on peut, si le champ est faible, négliger par rapport au dernier terme qui contient le potentiel. Celui-ci donne un courant proportionnel à l'intensité du champ, et qui représente exactement la relation, postulée par (I) entre le courant et le champ magnétique.

Par ailleurs, ce mécanisme n'est pas aussi étrange qu'il peut sembler. Il caractérise le supra-conducteur dans son ensemble, comme un seul gros atome diamagnétique. La fonction propre d'un atome diamagnétique, elle aussi, ne subit sous l'influence d'un champ magnétique qu'une perturbation en H^2 , qui n'est

pas essentielle pour la création du diamagnétisme. Le courant diamagnétique ordinaire provient plutôt entièrement du terme

$$\frac{e^2}{cm} \psi \psi^* \mathbf{A}.$$

Le moment de ce courant donne immédiatement la formule bien connue du diamagnétisme de l'atome. Les atomes ordinaires sont si petits que la pénétration d'un champ magnétique extérieur ne subit qu'un très petit effet d'écran. Il faudrait au moins un atome d'un diamètre $\geq$ à 10^{-5} cm [pour une densité électronique $\sim 10^{23}$ cm $^{-3}$] pour empêcher considérablement la pénétration d'un champ magnétique extérieur.

Complétons ceci pour le cas des *anneaux supra-conducteurs*. Pour ceux-ci, on n'a plus (27') mais bien (27)

$$\Delta c \mathbf{J} = \text{grad } \nu - \mathbf{A} \quad (27)$$

où le terme $\text{grad } \nu$ devient nécessaire afin de rendre compte de la présence d'un flux magnétique dans l'anneau.

Considérons tout d'abord un atome en forme d'anneau, avec un flux magnétique F traversant le trou, mais restreint à une si petite partie de celui-ci qu'il ne touche pas à l'anneau. Malgré cela, il est inévitable, si l'on veut décrire un pareil champ magnétique à l'aide d'un potentiel vecteur $\mathbf{A}$, que celui-ci soit notablement différent de zéro même dans l'anneau. Car sur toute courbe qui entoure le flux magnétique, donc aussi sur une courbe située tout entière à l'intérieur de l'anneau, il faut que

$$\oint \mathbf{A}_s ds = \iint H_n d\sigma = F.$$

On a donc inévitablement un potentiel vecteur dans l'équation d'onde des électrons de l'anneau bien que ceux-ci ne soient soumis à aucun champ magnétique effectif. On compense la présence d'un pareil potentiel vecteur, dénué de signification physique et pouvant toujours s'inscrire comme le gradient d'un scalaire, en changeant la « jauge » de la fonction d'onde. Lorsque $\mathbf{A} = \text{grad } \nu$, la fonction d'onde correctement « jaugée » s'écrit :

$$\psi = \psi_0 \cdot e^{-\frac{2\pi i}{h} \frac{e}{c} \nu} \quad (64)$$

ψ_0 étant la fonction d'onde de l'électron sans flux. On voit tout

de suite que ce ψ vérifie l'équation d'onde avec le potentiel vecteur $\mathbf{A} = \text{grad } \psi$ et que le courant (63), qui correspond à ces valeurs de ψ et $\mathbf{A}$, s'annulera au même temps que celui de ψ_0 .

Admettons maintenant que le flux magnétique touche un peu à l'anneau, mais qu'il soit assez faible pour que les champs n'y atteignent pas les valeurs critiques. On peut écrire alors le potentiel vecteur sous la forme

$$\mathbf{A} = \text{grad } \psi + \mathbf{A}_1$$

Le terme $\mathbf{A}_1$ est un petit complément qui ne devra pas apporter aux fonctions propres une perturbation plus forte que celle que nous avons admise en général pour des champs magnétiques faibles. C'est alors seulement ce terme $\mathbf{A}_1$ qui donne une contribution au courant $\mathbf{J}$ dans (63):

$$\mathbf{J} = - \frac{e^2}{mc} \psi_0 \psi_0^* \mathbf{A}_1 = \frac{e^2}{mc} \psi_0 \psi_0^* (\text{grad } \psi - \mathbf{A}) \quad (65)$$

Nous retombons exactement sur l'équation (27). Les courants persistants dans les anneaux doivent être ainsi considérés comme un phénomène de diamagnétisme qui se stabilise de lui-même.

Les faits que devra expliquer une future théorie électronique de la supra-conductibilité sont donc remarquablement simples : Pour créer et maintenir un supra-courant (*), il faut qu'il se passe aussi peu de chose que possible, du moins en ce qui concerne la fonction d'onde en état supra-conducteur ; plus précisément, que la fonction d'onde ne subisse dans un champ magnétique aucune perturbation proportionnelle à H , mais tout au plus proportionnelle à H^2 ou à des puissances plus élevées de H .

C'est une particularité de la description ondulatoire de la matière, de ne pas nous fournir une représentation immédiate de son état de mouvement en présence d'un champ magnétique. Il nous faut de plus connaître le champ : Le nombre d'onde des ondes de de Broglie n'est associé qu'à l'impulsion totale $\mathbf{p}$, qui se compose de l'impulsion « cinétique » $m\mathbf{v}$, plus l'impulsion « potentielle » $\frac{e}{c} \mathbf{A}$. Dans un supraconducteur simplement con-

(*) Bien entendu pour créer le supra-courant, mais non pour créer l'état supra-conducteur.

nexe, comme dans un atome diamagnétique, la densité d'impulsion totale

$$\mathbf{P} = \frac{h}{4\pi i} \sum (\psi \operatorname{grad} \psi^* - \psi^* \operatorname{grad} \psi) = \frac{m}{e} \left(\mathbf{J} + \frac{1}{\Lambda c} \mathbf{A} \right) \quad (66)$$

est nulle partout et reste pratiquement nulle dans un champ magnétique. C'est-à-dire l'impulsion cinétique du courant est égale, mais opposée à l'impulsion potentielle donnée par le potentiel vecteur du champ magnétique. Tel est le contenu de nos équations fondamentales.

Nous pouvons donc déduire de notre théorie macroscopique que, dans le langage de la cinématique quantique, l'état supra-conducteur peut être décrit par une rigidité particulière contre des perturbations magnétiques de la fonction d'onde, et nous arrivons ainsi à une conception essentiellement statique de ce phénomène, qui dénote justement une mobilité si anormale des électrons,

§ 11. Présence d'électrons de conduction ordinaires dans le supra-conducteur

Ce n'est qu'en forme de supplément que nous voulons mentionner une modification de la théorie, capable d'expliquer pourquoi, dans un supra-conducteur, les champs électriques et magnétiques ne se comportent pas de manière complètement symétrique bien que les phénomènes grossiers ($\mathbf{E} = 0$, $\mathbf{B} = 0$) suggèrent une symétrie de cette sorte. Nous expliquerons l'hypothèse III ($\rho = 0$) par une conception plausible, sans prétendre d'ailleurs que cette explication soit la seule qui puisse se concevoir.

Il est non seulement possible, mais tout indiqué, particulièrement grâce à la variation continue de la conductibilité thermique au point de transition ⁽²¹⁾, d'admettre que, lorsqu'on refroidit le supra-conducteur au-dessous du point de transition, les électrons supra-conducteurs apparaissent tout d'abord *graduellement*, et que par suite, dans tout élément de volume du supra-conducteur, il reste également des électrons de conduction ordinaires. Leur présence ne pourrait être observée dans les phénomènes de conduction électrique, car ils sont en quelque sorte court-circuités par les électrons supra-conducteurs. Inversement, pour les processus de pure conduction thermique les électrons supra-conducteurs sont sans influence, car d'après notre conception, ils ne peuvent effectuer de transport qu'en présence d'un champ magnétique, et seulement dans ce cas, sous la forme d'un courant pratiquement superficiel. Il semble donc plausible, que l'on ait trouvé dans l'état supra-conducteur une conductibilité thermique *plus petite* ⁽²¹⁾; c'est-à-dire qu'une partie des électrons de conduction manque.

Soit σ la conductibilité des électrons de conduction encore présents ; si l'on considère la densité de courant totale comme une somme du supra-courant et du courant normal et si l'on représente le supra-courant par les équations fondamentales (27), on devra écrire :

$$\mathbf{J} = -\frac{1}{\Lambda c} [\mathbf{A} + \text{grad } \psi] + \sigma \mathbf{E} \quad (67a)$$

$$\rho = -\frac{1}{\Lambda c^2} \left[\dot{\varphi} - \frac{1}{c} \dot{\psi} \right] \quad (67b)$$

Ici $\psi(x, y, z, t)$ est la fonction auxiliaire, qui exprime l'indétermination des potentiels et de leurs modules, et qui doit vérifier la condition supplémentaire :

$$\Delta \psi - \frac{1}{c^2} \ddot{\psi} = 0 \quad (68)$$

En prenant les rotationnels on déduit de (67a)

$$\Lambda c \text{ rot } \mathbf{J} = -\mathbf{B} - \sigma \Lambda \dot{\mathbf{B}} \quad (69)$$

C'est-à-dire que dans l'état stationnaire, on retombe sur la même relation diamagnétique entre $\mathbf{J}$ et $\mathbf{B}$ que tout à l'heure.

De plus on a :

$$\text{div } \mathbf{J} + \dot{\rho} = -\frac{1}{\Lambda c} \left[\text{div } \mathbf{A} + \frac{1}{c} \dot{\varphi} \right] + \sigma \cdot \text{div } \mathbf{E}$$

Ou en tenant compte de $\text{div } \mathbf{A} + \frac{1}{c} \dot{\varphi} = 0$: et de l'équation de continuité

$$\sigma \cdot \text{div } \mathbf{E} = \sigma \cdot \rho = 0 \quad (70)$$

Des charges en volume sont donc impossibles dans cette forme de la théorie. La détermination des champs dans le cas stationnaire se fait donc encore en posant $\varphi = C^{\text{te}}$ dans le supra-conducteur et en admettant une discontinuité de E_n à la surface (charges superficielles), car il existe une solution dans ce cas et dans ce cas seulement, comme pour les conducteurs ordinaires. Naturellement cette forme de la théorie ne nous conduit à aucune variation de la capacité d'un condensateur, conformément à l'expérience. La détermination de $\mathbf{J}$ se fait exactement comme en § 2.

Il résulte finalement de (67)

$$\mathbf{J} + c^2 \operatorname{grad} \rho = \frac{1}{\Lambda} \mathbf{E} + \sigma \dot{\mathbf{E}}$$

ou comme $\rho = 0$:

$$\mathbf{J} = \frac{1}{\Lambda} \mathbf{E} + \sigma \dot{\mathbf{E}} \quad (71)$$

La persistance du flux magnétique à travers un anneau supra-conducteur découle de ces équations, presque de la même manière qu'auparavant.

L'élimination de deux des grandeurs $\mathbf{B}$, $\mathbf{E}$, $\mathbf{J}$, donne pour la troisième les équations du deuxième ordre qui suivent [cf. (31)]

$$\left. \begin{aligned} c^2 \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} + \ddot{\mathbf{E}} + \sigma \dot{\mathbf{E}} + \frac{1}{\Lambda} \mathbf{E} &= 0 \\ c^2 \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{B} + \ddot{\mathbf{B}} + \sigma \dot{\mathbf{B}} + \frac{1}{\Lambda} \mathbf{B} &= 0 \\ c^2 \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{J} + \ddot{\mathbf{J}} + \sigma \dot{\mathbf{J}} + \frac{1}{\Lambda} \mathbf{J} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (72)$$

En outre nous avons encore

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{E} &= 0 \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0 \\ \operatorname{div} \mathbf{J} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Pour la vérification de l'hypothèse (67), il se présente un effet thermique ⁽²²⁾ dû à la présence d'électrons de conduction ordinaires. En portant (71) dans le terme $\mathbf{E} \mathbf{J}$ de l'équation de l'énergie on obtient à la place de (32)

$$\operatorname{div} c [\mathbf{E} \mathbf{H}] = - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2 + \Lambda (\mathbf{J} - \sigma \mathbf{E})^2}{2} \right) - \sigma \mathbf{E}^2 \quad (73)$$

Le dernier terme représente une chaleur de Joule. A cause de $\varphi = \text{Const.}$, les champs électriques ne se laissent créer dans le supra-conducteur que par induction par des champs magnétiques variables. Pour obtenir un effet thermique quelconque, il faut appliquer la méthode du chauffage à haute fréquence. L'effet doit être proportionnel au carré de la fréquence ω du champ extérieur, tant que la couche $c/\sqrt{\Lambda}$ est plus petite que la couche du Skin effet $\frac{c}{\sqrt{\sigma \omega}}$, c'est-à-dire pour des fréquences $\omega \ll \frac{1}{\sigma \Lambda}$.

On obtient, dans ce cas, pour la chaleur dégagée Q par sec. et par cm^2 de surface :

$$Q = c \sigma \Lambda^{3/2} \omega^2 \cdot \frac{1}{2} \overline{H}^2 \quad (74)$$

$\overline{H}^2$ représente la valeur quadratique moyenne du champ magnétique extérieur. Pour des fréquences $\omega \sim \frac{1}{\sigma \Lambda}$, on passerait à un Skin-effet habituel. Mais pour des fréquences de cet ordre, il faudrait déjà tenir compte de l'inertie des électrons de conduction, comme dans l'optique métallique habituelle.

Tant qu'on se borne à des considérations théoriques, une décision pour ou contre cette hypothèse est pour le moment à peine possible. Une mesure de l'effet thermique serait importante aussi bien pour trancher la question de la présence d'électrons de conduction, que pour déterminer la valeur de la constante fondamentale Λ du supra-conducteur.

RÉFÉRENCES

- (¹) L. LANDAU, *Phys. Zs. d. Sowjetunion*, **4**, 43, 1933 ; *Handbuch der Physik*, 2. Aufl., XXIV₂, 555, Berlin, 1934.
- (²) L. BRILLOUIN, *Journ. de phys. et rad.*, **4**, 360 ; 1933 ; *Helvetica phys. Acta*, **7**, Suppl. II, 43, 1935 ; *Proc. Roy. Soc.*, **152**, 19, 1935.
- (³) G. LIPPMANN *C. R.* **168**, 73, 1919 ; *M. v. Laue und F. Möglich Preuss. Akad. d. Wissensch.*, 1933, 541.
- (⁴) H. KAMERLINGH-ONNES und W. TUYN, *Comm. Leiden*, 198 (1929), Suppl. 50 a (1924).
- (⁵) W. MEISSNER und R. OCHSENFELD, *Naturwiss.*, **21**, 787, 1933 ; *Zs. f. techn. Phys.*, **15**, 507 (1934) ; J. N. RJABININ und L. W. SCHUBNIKOW, *Phys. Zs. d. Sowj.*, **6**, 557, 1935 ; K. MENDELSSOHN and J. D. BABBITT, *Proc. Roy. Soc., A*, **151**, 316 (1935).
- (⁶) KEELEY and MENDELSSOHN, *Nature*, **134**, 773 (1934).
- (⁷) C. J. GORTER, *Arch. Teyler*, **7**, 378 (1933) ; *Nature*, **132**, 931, 1933 ; C. J. GORTER and H. CASIMIR, *Physica*, **1**, 305, 1934.
- (⁸) P. EHRENFEST, *Leiden Comm. Suppl.*, 75 b (1933).
- (⁹) K. MENDELSSOHN and J. R. MOORE, *Nature*, **133**, 413 (1934).
- (¹⁰) W. H. KEESOM and J. A. KOK, *Physica*, **1**, 503, 1934.
- (¹¹) W. H. KEESOM and J. A. KOK, *Physica*, **1**, 175, 1934.
- (¹²) K. MENDELSSOHN and J. R. MOORE, *Nature*, **134**, 773 (1934) ; *Proc. Roy. Soc., A*, **151**, 334 (1935) ; L. W. SCHUBNIKOV and W. J. CHOTKEVITCH, *Phys. Zs. d. Sowj.* **6**, 605, 1935.
- (¹³) F. and H. LONDON, *Proc. Roy. Soc., A*, **149**, 71, 1935 ; *Physica*, **2**, 341, 1935 ; F. LONDON, *Proc. Roy. Soc., A*, **152**, 24, 1935.
- (¹⁴) G. L. DE HAAS-LORENTZ, *Physica*, **5**, 384, 1925 ; R. BECKER, G. SAUTER und F. HELLER, *Zs. Phys.*, **85**, 772, 1933 ; W. BRAUNBECK, *Zs. Phys.*, **87**, 470, 1934 ; H. G. SMITH, *Univ. Toronto Studies Low Temp. Ser.*, No. 76, 1935.
- (¹⁵) M. v. LAUE, F. and H. LONDON, *Zs. Phys.*, **96**, 359, 1935 ; E. SCHRÖDINGER, *Nature*, **137**, 824, 1936.
- (¹⁶) H. LONDON, *Proc. Roy. Soc., A*, **155**, 102, 1936.
- (¹⁷) H. KAMERLINGH-ONNES and K. HOF, *Comm. Leiden*, 1914, No. 142 b ; H. A. LORENTZ, *Comm. Leiden*, Suppl. 1924, No. 506.
- (¹⁸) H. LONDON, *Proc. Roy. Soc., A*, **152**, 650, 1935 ; cf. C. J. GORTER, *Physica*, **2**, 449, 1935.
- (¹⁹) Cf. E. F. BURTON, J. O. WILHELM and A. D. MISENER, *Trans. Roy. Soc. Canada*, **28**, III, 65 (1934) ; A. O. MISENER and J. O. WILHELM, *Trans. Roy. Soc. Canada*, **29**, III, 1935.
- (²⁰) L. LANDAU, *Zs. Phys.* **64**, 629, 1930.
- (²¹) W. J. DE HAAS und H. BREMMER, *Comm. Leiden* **214** d, 1931 ; **220** a, 1932.

- (²²) H. LONDON, *Nature*, **133**, 497 (1934).
(²³) F. LONDON, *Physica*, **3**, 450, 1936 ; *Nature*, **137**, 991, 1936.
(²⁴) R. PEIERLS, *Proc. Roy. Soc.*, A, **155**, 613, 1936.
(²⁵) W. J. DE HAAS and A. GUINAU, *Physica*, **3**, 182, 534, 1936 ; K. MENDELSSOHN, *Proc. Roy. Soc.*, A, **155**, 558, 1936 ; D. SHOENBERG, *Proc. Roy. Soc.*, A, **155**, 712, 1936.
(²⁶) W. J. DE HAAS, *Leipziger Vorträge*, 1933 (Hirzel), 68.
(²⁷) W. J. DE HAAS and J. VOOGD, *Comm. Leiden*, n° 214c, 1931.

Cette liste contient seulement les références du texte. Sur les travaux expérimentaux, voir les rapports généraux :

- W. MEISSNER, *Ergebn. d. ex. Naturw.*, **11**, 218, 1932.
W. J. DE HAAS et J. VOOGD, *Comptes rendus du Congr. Intern. d'Electricité*, Paris, 1932, II, 671.
E. F. BURTON, *Superconductivity* (Univ. Toronto Press, 1934).
H. G. SMITH and J. O. WILHELM, *Rev. of Mod. Phys.*, **7**, 237, 1935
W. MEISSNER u. F. HEIDENREICH, *Phys. Zs.*, **37**, 449, 1936.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION	7
§ 1. Quelques faits fondamentaux et leurs corrélations thermodynamiques	9
§ 2. Les équations fondamentales d'électromagnétisme dans un supra-conducteur	18
§ 3. Anneaux supra-conducteurs. Conservation du flux magnétique à travers un anneau	26
§ 4. Les conditions aux limites. Charges en volume ou superficielles ?	32
§ 5. Le condensateur supra-conducteur	34
§ 6. Conservation de l'énergie et de l'impulsion. Tenseur des pressions	40
§ 7. Le mécanisme de la transformation des phases	43
§ 8. L'énergie superficielle de la phase supraconductrice	48
§ 9. L'état intermédiaire	50
§ 10. Description quantique de la supra-conductibilité	69
§ 11. Présence d'électrons de conduction ordinaires	74
RÉFÉRENCES	79

Deuxième thèse :

Les propriétés de l'hélium au zéro absolu

VU ET APPROUVÉ :

Paris, le 18 décembre 1936

Le Doyen de la Faculté des Sciences,

Ch. MAURAIN.

VU ET PERMIS D'IMPRIMER :

Le Recteur de l'Académie de Paris,

S. CHARLÉTY.

Imp. G. Thone, Liège (Belgique)